



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفنى
الإدارة المركزية لشئون الكتب



الرياضيات

الصف الثالث الإعدادى | كتاب الطالب | الفصل الدراسى الأول

تأليف

الأستاذ / عمر فؤاد جاب الله

الأستاذ الدكتور/ عفاف أبو الفتوح صالح | الدكتور/ عصام وصفى روفائيل

الأستاذ / سيرافيم الياس اسكندر | الأستاذ / كمال يونس كبشة

مراجعة

أ/سمير محمد سعداوى | أ/فتحى حسن شحاتة

إشراف علمى
مستشار الرياضيات
أ/ جمال الشاهد

إشراف تربوي
مركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

طبعة : ٢٠٢٢ / ٢٠٢٣ م

الاسم: ....

المدرسة: ....

الفصل: ....

العنوان: ....

العام الدراسى: ....

مقدمة الكتاب

أبناءنا الأعزاء

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثالث الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستكم للرياضيات عملًا ممتعًا ومفيدًا له تطبيقاته فى حياتكم العملية، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدروا دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم، وما سبق أن درستموه فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم ، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسبا داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة والتدريبات: يوجد تمارين على كل درس، وتمارين عامة على الوحدة، ونشاط خاص، واختيار فى نهاية كل وحدة ، وفى نهاية الفصل الدراسى يوجد نماذج اختبارات عامة تساعدكم على مراجعة المقرر كاملاً.

نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لكم ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون



الجبر

الوحدة الأولى: العلاقات و الدوال

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى

الإحصاء

الوحدة الثالثة : الإحصاء



حساب المثلثات

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

الهندسة التحليلية

الوحدة الخامسة: الهندسة التحليلية

الرموز الرياضية المستخدمة

الرمز	المعنى	الرمز	المعنى
ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	⊥	عمودى على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازى
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{\text{أ ب}}$	القطعة المستقيمة أ ب
نَ	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	الشعاع أ ب
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$	المستقيم أ ب
$\sqrt{\text{أ}}$	الجذر التربيعى للعدد أ	ق (∠ أ)	قياس زاوية أ
$\sqrt[3]{\text{أ}}$	الجذر التكعيبى للعدد أ	ق ($\frown{\text{أ ب}}$)	قياس القوس أ ب
[أ ، ب]	فترة مغلقة	~	تشابه
]أ ، ب[	فترة مفتوحة	<	أكبر من
]أ ، ب]	فترة نصف مفتوحة	⩽	أكبر من أو تساوى
[أ ، ب[	فترة نصف مفتوحة	>	أقل من
[أ ، ∞[	فترة غير محدودة	⩾	أقل من أو تساوى
≡	تطابق	ل(أ)	احتمال وقوع الحدث أ
ن (أ)	عدد عناصر الحدث أ	$\overline{\text{س}}$	الوسط الحسابى
ف	فضاء العينة	σ	الانحراف العيارى
		مجـ أو Σ	المجموع



العلاقات و الدوال

قذف أحد اللاعبين كرة فأخذت المسار الموضح بالشكل.

هذا الشكل يمثل إحدى الدوال التي ستدرسها وتسمى بالدالة التربيعية.



حاصلُ الضَّربِ الديكارتي



سوف تتعلم

- كيفية إيجاد حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين غير خاليتين.

مصطلحات أساسية

- زوجٌ مرتبٌ
- حاصلُ ضرب ديكارتي .
- مخططٌ سهمي .
- مخطط بياني
- علاقة .

فكر وناقش

سبق وأن درست العلاقة بين متغيرين س، ص.

١ أوجد مجموعة الأزواج المرتَّبة التي تُحقِّق العلاقة:
ص = ٢ س - ١ عندما س = ٠، س = ١، س = ٢

٢ مثِّل هذه الأزواجَ المرتبة بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

٣ هل الزوجُ المرتب (٣، ٥) يساوي الزوج المرتب (٥، ٣)؟
(استعن بالرسم).

مما سبق نلاحظ:

١ في الزوج المرتب (أ، ب) يسمى أ بالمسقط الأول، ب بالمسقط الثاني.

٢ كلُّ زوجٍ مرتبٍ يمثلُ بنقطةٍ واحدةٍ وواحدة فقط في المستوى الإحداثي.

٣ **إذا كان** أ ≠ ب **فإن** (أ، ب) ≠ (ب، أ)، لماذا ؟

٤ (أ، ب) ≠ {أ، ب}.

٥ **إذا كان** (أ، ب) = (س، ص) **فإن** أ = س، ب = ص

مثال ١

أوجد س، ص إذا كان : (س - ٢، ٣) = (٥، ص + ١)

الحل

س - ٢ = ٥ ∴ س = ٧ ، ٣ = ص + ١ ∴ ص = ٢



تدرب

أوجد أ، ب في كلٍّ مما يأتي:

أ (أ، ب) = (-٥، ٩)

ب (أ - ٢، ب + ١) = (٢، -٣)

جـ (٦، ب - ٣) = (٢ - أ، - ١)

د (أ - ٧، ٢٦) = (-٢، ب^{٣} - ١)



مثال ٢

إذا كانت سـ = {أ، ب}، صـ = {-١، ٠، ٣} **فأوجد:**

سـ × صـ ، صـ × سـ، **ماذا تلاحظ؟**

الحل

لإيجاد حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة سـ في المجموعة صـ ويُرمز له بالرمز سـ × صـ، نكتب مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصرٌ من سـ ، ومسقطها الثاني عنصرٌ من صـ فيكون:

سـ × صـ = {أ، ب} × {-١، ٠، ٣} = {(أ، -١)، (أ، ٠)، (أ، ٣)، (ب، -١)، (ب، ٠)، (ب، ٣)}

كما أن: صـ × سـ = {-١، ٠، ٣} × {أ، ب} = {(-١، أ)، (-١، ب)، (٠، أ)، (٠، ب)، (٣، أ)، (٣، ب)}

نلاحظ أن: سـ × صـ ≠ صـ × سـ

ويمكن الحصول على سـ × صـ، صـ × سـ من الجدولين الآتيين:

×		المسقطُ الثاني		
		-١	٠	٣
المسقط الأول	أ	(أ، -١)	(أ، ٠)	(أ، ٣)
	ب	(ب، -١)	(ب، ٠)	(ب، ٣)

×		المسقطُ الثاني	
		أ	ب
المسقط الأول	-١	(-١، أ)	(-١، ب)
	٠	(٠، أ)	(٠، ب)
	٣	(٣، أ)	(٣، ب)

فكر:

١ متى يكون سـ × صـ = صـ × سـ؟

٢ هل عدد عناصر سـ × صـ = عدد عناصر صـ × سـ؟

ملاحظات:

١ **إذا كانت** سـ، صـ مجموعتين منتهيتين وغير خاليتين،
فإن: سـ × صـ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ صـ}

٢ سـ × صـ ≠ صـ × سـ **حيث:** سـ ≠ صـ

ن (سـ × صـ) = ن (صـ × سـ) = ن (سـ) × ن (صـ)

حيث ن ترمز إلى عددِ عناصر المجموعة.

٣ **إذا كان** (ك، م) ∈ سـ × صـ **فإن** ك ∈ سـ، م ∈ صـ

٤ **إذا كانت** سـ مجموعةً غير خاليةٍ
فإن: سـ × سـ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ}
و تكتب أحيانًا $سـ^{٢}$ وتقرأ (سـ اثنين).

مثال ٣

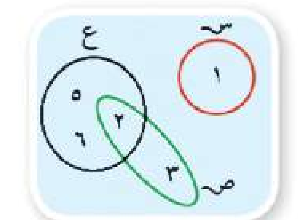
إذا كانت سـ = {١}، صـ = {٢، ٣}، ع = {٢، ٥، ٦} مثّل المجموعات سـ، صـ، ع بشكل ڤن ثم أوجد:

أولاً: أ سـ × صـ　　ب صـ × ع　　جـ سـ × ع　　د صـ٢

ثانيًا: (سـ × صـ) ∪ (صـ × ع)　　**ثالثًا:** سـ × (صـ ∩ ع)

رابعًا: (سـ × صـ) ∩ (سـ × ع)　　**خامسًا:** (ع − صـ) × (سـ ∪ صـ)

الحل



أولاً:

أ سـ × صـ = {١} × {٢، ٣} = {(١، ٢)، (١، ٣)}

ب صـ × ع = {٢، ٣} × {٢، ٥، ٦}

= {(٢، ٢)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٣، ٢)، (٣، ٥)، (٣، ٦)}.

جـ سـ × ع = {١} × {٢، ٥، ٦} = {(١، ٢)، (١، ٥)، (١، ٦)}

د صـ٢ = صـ × صـ = {٢، ٣} × {٢، ٣}

= {(٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٣، ٣)}

ثانيًا: (سـ × صـ) ∪ (صـ × ع) = {(١، ٢)، (١، ٣)، (٢، ٢)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٣، ٢)، (٣، ٥)، (٣، ٦)}

ثالثًا: سـ × (صـ ∩ ع) = {١} × {٢} = {(١، ٢)}

رابعًا: (سـ × صـ) ∩ (سـ × ع) = {(١، ٢)، (١، ٣)} ∩ {(١، ٢)، (١، ٥)، (١، ٦)} = {(١، ٢)}.

خامسًا: ع − صـ = {٥، ٦}　∴ (ع − صـ) × (سـ ∪ صـ) = 　　أكمل



إذا كانت سـ = {٢، -١}، صـ = {٤، ٠}، ع = {٤، ٥، -٢} أوجد

أ سـ × صـ　　ب صـ × ع　　جـ سـ٢

د ن (سـ × ع)　　هـ ن (صـ٢)　　و ن (ع٢)

تمثيلُ حاصلِ الضربِ الديكارتي:

مثال ٤

١ إذا كانت سـ = {١، ٢}، صـ {٣، ٤، ٥} **أوجد:** سـ × صـ، ومثله:

أولاً: بالمخططِ السَّهمي.　　**ثانيًا: بالمخططِ البياني.**

الحل

س × ص = {١، ٢} × {٣، ٤، ٥} = {(١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)}

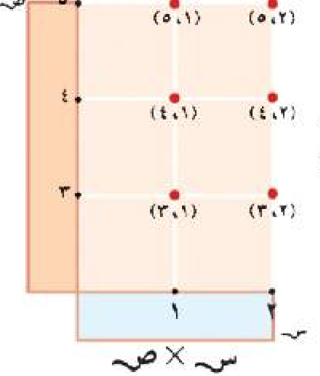
و يمثل حاصل الضرب الديكارتي س × ص بمخطط سهمي أو شبكة بيانية، كما يلي:



أولاً: المخطط السهمي

نرسم سهمًا من كلّ عنصرٍ يمثلُ المسقطَ الأول (وهي عناصرُ المجموعة س)
إلى كلّ عنصرٍ يمثل المسقط الثاني (وهو عناصر المجموعة ص)

أي أن: المخططُ السهميُّ لحاصلِ الضرب الديكارتي يُمثِّل كلّ زوجٍ مرتبٍ بسهمٍ يخرج من مسقطه الأول و ينتهي عند مسقطه الثاني.



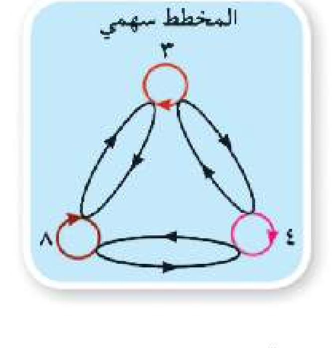
ثانيًا: المخططُ البياني (الشبكةُ البيانيةُ المتعامدة)

تمثل على شبكة بيانية متعامدة عناصر المجموعة س أفقيًا، وعناصر المجموعة ص رأسيًا فتكون نقطُ تقاطع الخطوط الأفقية والرأسيَّة تمثل الأزواج المرتبة لعناصرِ حاصل الضرب الديكارتي س × ص.

مثال ٥

إذا كانت س = {٣، ٤، ٨} فأوجد س × س ومثِّله بمخططٍ سهميٍّ.

الحل



س × س = {٣، ٤، ٨} × {٣، ٤، ٨}

= {(٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٨)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٨)، (٨، ٣)، (٨، ٤)، (٨، ٨)}.

و يلاحظ في الشكلِ: قد مُثلت الأزواجُ المرتبةُ بأسهم، وأن الأزواجَ المرتبة التي فيها المسقطُ الأول يساوي المسقطَ الثاني مثل (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٨، ٨) مُثلت بعروةٍ لتدل على أن السهمَ يخرجُ من النقطةِ، و ينتهي عند نفس النقطة.

لاحظ أن: ن (س) = ٣ فتكون: ن (س × س) = ٣ × ٣ = ٩

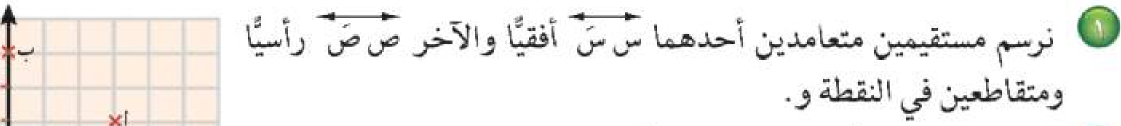
وفي هذه الحالةِ يمثل حاصل الضرب الديكارتي س × س بيانيًا بتسع نقاطٍ، وكلّ نقطةٍ تمثِّل زوجًا مرتبًا.

أما إذا كانت س مجموعةً غيرَ منتهيةٍ (لا يمكن حصر عدد عناصرها) فإن:
عدد عناصر س × س يكون غير منته.

فكر: كيف يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتي لكل من:
ط × ط، ص × ص، ن × ن، ح × ح

حاصلُ الضربِ الديكارتي للمجموعاتِ غير المنتهية والتَّمثيل البياني له.

أولاً: لتمثيل حاصل الضربِ الديكارتي ط × ط = {(س، ص) : س ∈ ط، ص ∈ ط}



١ نرسم مستقيمين متعامدين أحدهما $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ أفقيًا والآخر $\overleftrightarrow{\text{ص ص}'}$ رأسيًا ومتقاطعين في النقطة و.

٢ نمثل الأعدادَ الطَّبيعية ط على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي مبتدئين بالنقطة (و) التي تمثل العددَ صفر.

٣ ترسم مستقيماتٌ رأسيةٌ وأخرى أفقيةٌ من النقطِ التي تمثل الأعدادَ الطَّبيعية، سوف نحصل على الشكلِ المقابلِ، وتكون نقطُ التقاطع لمجموعة هذه المستقيمات ممثلةً للشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتي ط × ط.

لاحظ أن: كلُّ نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي ط × ط.

فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٣، ٢)، النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٠، ٤)

أكمل: النقطة جـ تمثل الزوج المرتب (،   )، النقطة و تمثل الزوج المرتب (،   )

ثانيًا: لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي صـ × صـ = {(س، ص): س ∈ صـ، ص ∈ صـ}.

نمثل مجموعةَ الأعدادِ الصَّحيحة على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠،٠)

فتكون كلُّ نقطةٍ من نقط الشبكة تمثِّل أحدَ الأزواج في حاصل الضرب الديكارتي صـ × صـ.

وتعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثي صـ × صـ

فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٢،٣)، النقطة ب تمثل تمثل الزوج المرتب (٣،-٢)



ثالثًا: لتمثيلِ حاصل الضرب الديكارتي ن × ن = {(س، ص) : س∋ ن، ص∋ ن}

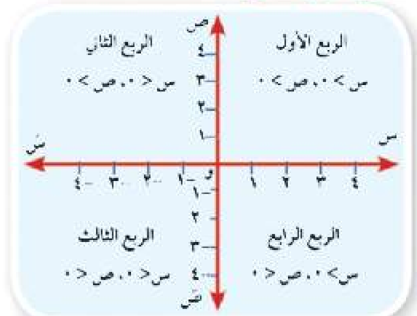
ارسم شبكةً بيانيةً متعامدةً ومثل مجموعةَ الأعدادِ النسبية ن على المستقيمين الأفقي والرأسي، ثم عيِّن عليها النقط: أ (٣، $\frac{٥}{٢}$)، ب (-$\frac{٣}{٢}$، ٤)، جـ (-٣، -$\frac{٣}{٢}$)، د ($\frac{٥}{٢}$، -$\frac{٣}{٢}$)

رابعًا: تمثيل حاصل الضرب الديكارتي ع × ع = {(س، ص) : س ∋ ع، ص ∋ ع}

حيث تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي، كما تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠، ٠)

يسمى المستقيم الأفقي س سَ محور السينات، ويسمّى المستقيم الرأسي ص صَ محور الصادات

فتنقسم الشبكةُ إلى أربعةِ أقسامٍ (أرباع) كما بالشّكل المقابل:



مثال ٦

كوِّن شبكةً تربيعيةً متعامدةً لحاصِل الضرب الديكارتي ع × ع ثم اذكر الربعَ الذي تقعُ فيه أو المحور الذي ينتمي إليه كل من النقط الآتية:

أ (٣، ٣)، ب (٣، -٢)، جـ (-٤، -٢)، ى (-٤، ٣)، هـ (٠، -٣)، ز (٢، ٠)

الحل

أ (٣،٣) تقع في الربع الأول

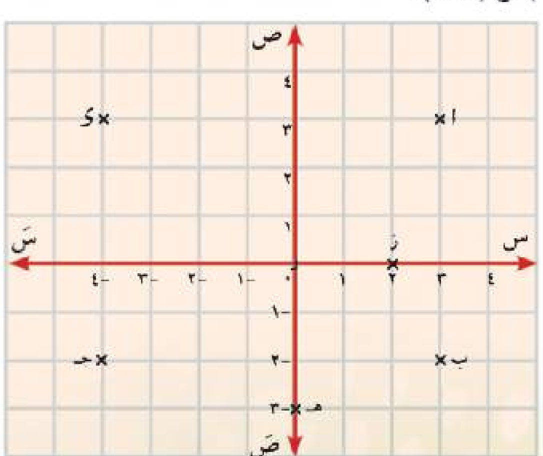
ب (٣، -٢) تقع في الربع الرابع

جـ (-٤، -٢) تقع في الربع الثالث

د (-٤، ٣) تقع في الربع الثاني

هـ (٠، -٣) تقع على محور الصادات

ز (٢، ٠) تقع على محور السينات.





العلاقات

سوف تتعلم

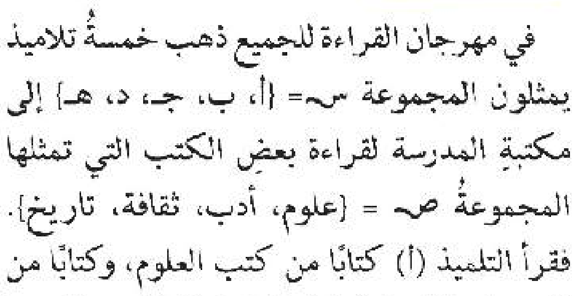
- ☆ مفهوم العلاقةُ من مجموعة س إلى مجموعة ص.
- ☆ مفهوم العلاقةُ من مجموعة إلى نفسها.

مصطلحات أساسية

- ☆ علاقة.
- ☆ بيان العلاقة.

فكر وناقش



في مهرجان القراءة للجميع ذهب خمسةُ تلاميذ يمثلون المجموعة س = {أ، ب، جـ، د، هـ} إلى مكتبةِ المدرسة لقراءة بعضِ الكتب التي تمثلها المجموعةُ ص = {علوم، أدب، ثقافة، تاريخ}.
فقرأ التلميذ (أ) كتابًا من كتب العلوم، وكتابًا من كتب الثقافة، وقرأ التلميذ (ب) كتابًا من كتب التاريخ، وقرأ التلميذ (جـ) كتابًا أدبيًا، وقرأ التلميذ (هـ) كتابًا من كتب التاريخ، ولم يقرأ التلميذ (د) أيًا من هذه الكتب.

(١) اكتب العبارات السابقةَ في صورة أزواج مرتبة من س إلى ص.

(٢) مثّل مجموعة الأزواج المرتبة السابقة في صورة مخطط سهمي.

لاحظ أن: التعبير «قرأ» قد ربط بين بعض عناصر المجموعة س ببعض عناصر المجموعة ص أي أن التعبير «قرأ» يعين علاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص وسنرمز لها عادة بالرمز ع وهذه العلاقة يمكن تمثيلها بمخططٍ سهميٍّ كالمبين بالشكل المقابل، حيث نرسمُ سهمًا يبدأ من التلميذِ، وينتهي عند نوع الكتب التي قرأها.

كما نستطيع أن نعبر عن العلاقة من س إلى ص بمجموعة الأزواج المرتبة الآتية:

{(أ، علوم)، (أ، ثقافة)، (ب، تاريخ)، (جـ، أدب)، (هـ، تاريخ)}.

هذه المجموعةُ من الأزواجِ المرتبة تسمى بيان العلاقة ع.

فكّر: هل بيان العلاقة ع مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي س × ص؟

مثال ١

إذا كانت س = {-١، ١، ٢}، ص = {٢، ٤، ٦، ٨}، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني: «ب = ٢ أ + ٤»، لكل أ ∈ س، ب ∈ ص
اكتب بيان ع ومثّلها بمخططٍ سهميٍّ وآخر بياني.



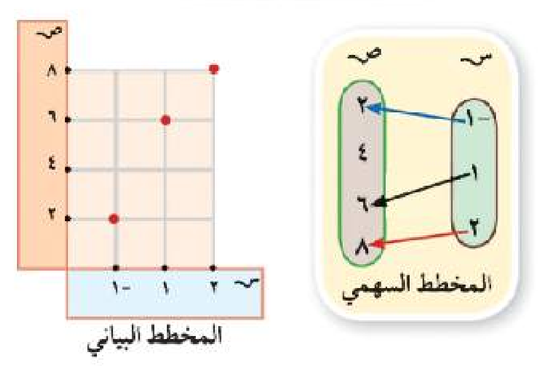
الحل

عندما أ = -١ ∴ ب = ٢ × (-١) + ٤ = ٢

عندما أ = ١ ∴ ب = ٢ × ١ + ٤ = ٦

عندما أ = ٢ ∴ ب = ٢ × ٢ + ٤ = ٨

∴ ع = {(-١، ٢)، (١، ٦)، (٢، ٨)}



مما سبق نستنتج أن

١) العلاقة من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ حيث سـ، صـ مجموعتان غير خاليتين هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر سـ ببعض أو كل عناصر صـ.

٢) بيان العلاقةِ من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ هي مجموعةُ الأزواج المرتَّبة حيث المسقطُ الأول في كلٍّ منها ينتمي إلى المجموعة سـ ، والمسقط الثاني ينتمي إلى المجموعة صـ.

٣) إذا كانت ع علاقةً من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ فإن ع ⊂ سـ × صـ.

العَلاقةُ من مجموعة إلى نفسها

إذا كان ع علاقة من سـ إلى سـ فإن ع تسمى علاقة على المجموعة سـ وتكون ع ⊂ سـ × سـ

مثال ٢

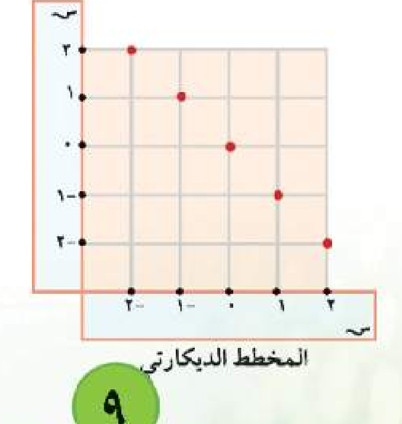
إذا كانت سـ = {-٢، -١، ٠، ١، ٢} وكانت ع علاقةً معرفة على سـ حيث أ ع ب تعني :

«العدد أ معكوس جمعي للعدد ب». لكل أ، ب ∈ سـ

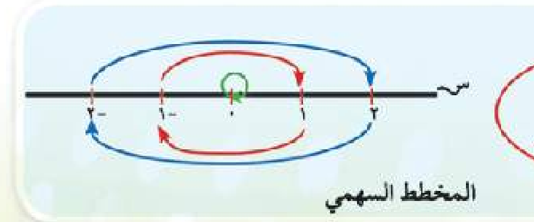
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر ديكارتي.

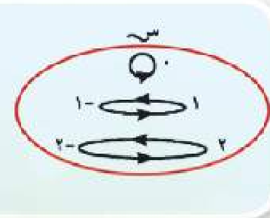
الحل

ع = {(-٢، ٢)، (-١، ١)، (٠، ٠)، (١، -١)، (٢، -٢)}



المخطط الديكارتي





المخطط السهمي



الدَّالةُ (التطبيق)



سوف تتعلم

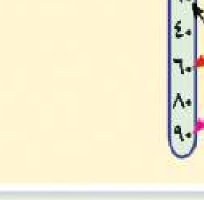
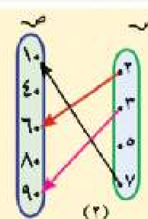
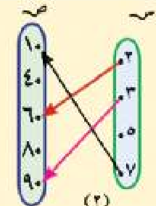
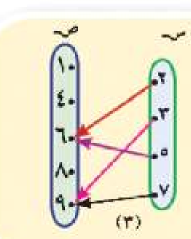
- ☆ مفهوم الدالة
- ☆ كيفية التَّعبير رمزيا عن الدالة.

مصطلحات أساسية

- ☆ دالة
- ☆ مجال
- ☆ المجال المقابل
- ☆ مدى

فكر و ناقش

الأشكالُ الآتيةُ تمثِّل ثلاثَ عَلاقات من سـ إلى صـ.

(١) (٢) (٣)

١ اكتب بيانَ كل علاقةٍ ومثِّلها بمخططٍ بياني.

٢ أي من هذه العلاقاتِ تحقِّق الشرطَ التالي: كل عنصر من عناصر سـ ارتبط بعنصرٍ واحد فقط من عناصر «صـ».

تعريف

يقالُ لعلاقة من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ أنها دالة إذا كان:

كلُّ عنصرٍ من عناصر سـ يظهر كمسقطٍ أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة المحدّدة لبيان العلاقة.

التعبيرُ الرمزيُّ للدالة:

١ يرمزُ للدالةِ بأحد الرموز: د أو ق أو ر أو ...

والدالة د من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ تكتب رياضيًّا:

د: سـ ← صـ وتقرأ: «د دالة من سـ إلى صـ».

ملاحظات:

١ إذا كانت د دالة من المجموعة سـ إلى نفسها نقولُ إن د دالة على سـ.

٢ إذا كان الزوجُ المرتب (س، ص) ينتمي لبيان الدالة فإن العنصرَ ص يسمى صورة العنصر س بالدالة د. ونعبر عنه بإحدى الصورتين.

د: س ↦ ص وتقرأ الدالة: د ترسم س إلى ص

أو د (س) = ص وتقرأ: د دالة حيث د (س) = ص

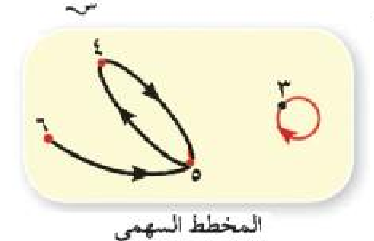


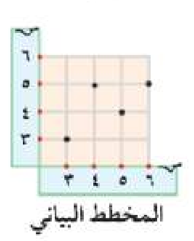


إذا كانت د دالة على سـ حيث: سـ = {٣، ٤، ٥، ٦} وكان د (٣) = ٣، د (٤) = ٥، د (٥) = ٤، د (٦) = ٥.
مثل د بمخطط سهمي وآخر بياني، اكتب بيانها.

الحل

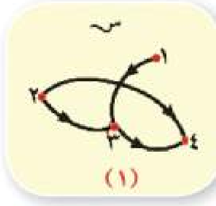
بيان د = {(٣، ٣)، (٤، ٥)، (٥، ٤)، (٦، ٥)}

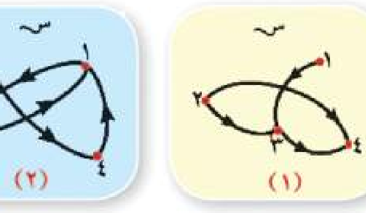

المخطط السهمي


المخطط البياني

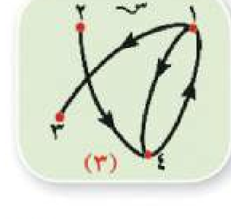


١ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣، ٤} فأي من المخططات السَّهمية الآتية تعبر عن دالةٍ على المجموعة سـ

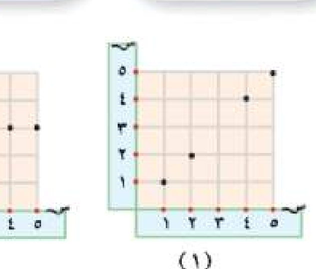

(١)

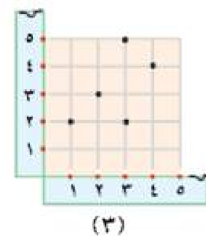

(٢)




(٣)

٢ أي من المخططاتِ البيانيةِ الآتية تعبِّر عن دالة من سـ إلى سـ.


(١) (٢)


(٣)

فكِّر: هل كل علاقة دالة؟ فسِّر إجابتك وأعط أمثلة.

المجال والمجال المقابل والمدى

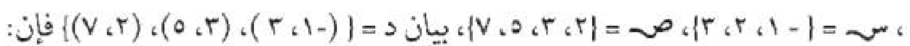
إذا كانت د دالة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ، أي أن: د: سـ ← صـ فإن:

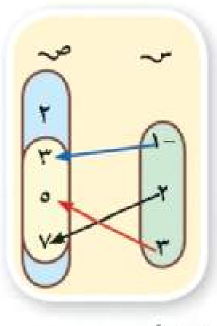
المجموعةُ سـ تسمى مجال الدالة د.

المجموعةُ صـ تسمى المجال المقابل للدالة د.

مجموعةُ صور عناصر مجموعة المجال سـ بالدالة د تسمى مدى الدالة.

فمثلاً: إذا كانت د: سـ ← صـ


، سـ = {-١، ٢، ٣}، صـ = {٢، ٣، ٥، ٧}، بيان د = {(-١، ٣)، (٣، ٥)، (٢، ٧)} فإن:



١ مجال الدالة د هو المجموعة سـ = {-١، ٢، ٣}

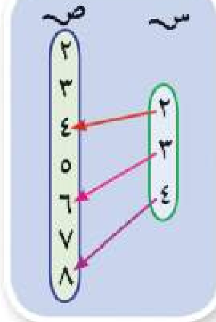
٢ المجالُ المقابلُ للدالةِ د هو المجموعة صـ = {٢، ٣، ٥، ٧}

٣ مدى الدالة د هو مجموعةُ صور عناصر المجموعة سـ بواسطة الدالة د = {٣، ٥، ٧}

لاحظ أن: المدى مجموعةٌ جزئيةٌ من المجالِ المقابل للدالة.

مثال ٢

إذا كانت س = {٢، ٣، ٤}، ص = {ص : ص ∈ ط، ٢ ≤ ص < ٩} حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني: «أ = $\frac{1}{2}$ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص، اكتب بيان ع ومثِّلها بمخطط سهمي. بين أن ع دالة من س إلى ص وأوجد مداها.



الحل

ص = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}　　بيان ع = {(٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط لأحد عناصر ص

مدى الدالة = {٤، ٦، ٨}

مثال ٣

إذا كانت س = {٠، ١، ٣}، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧} وكانت د : س ⟵ ص حيث د (س) = ٥ − س. أوجد: ١ـ أوجد صور عناصر س بالداله د.

٢ـ ارسم مخطط بيانى للداله د.

الحل

د (س) = ٥ − س

د (٠) = ٥ ، د (١) = ٤ ؛ د (٣) = ٢

بيان الداله د = {(٠ ، ٥) ؛ (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢)}

مدى الداله = {٥ ؛ ٤ ؛ ٢}



دوالٌّ كثيراتُ الحُدودِ

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الخطية وتمثيلها البياني.

مصطلحات أساسية

- دالةٌ كثيرةُ الحدود.
- دالةٌ خطيةٌ.
- دالة تربيعية.
- تمثيل بياني للدالة.



في الدوال د: ح ← ح ، د (س) = ٥

ر: ح ← ح ، ر (س) = ٣ س - ٨

ه: ح ← ح ، ه (س) = ٤ س^{٢} - ٥ س + ٨

نلاحظ أن :

١. المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعةُ الأعدادِ الحقيقية ح.
٢. قاعدةُ الدالة (صورة س) هي حد أو مقدار جبري.
٣. ما قوة المتغير س في الدوالِ السابقةِ؟

تعريف

الدالة د : ح ← ح حيث:

د (س) = أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ س + أ$_{٢}$ س^{٢} + ... + أ$_{ن}$ س^{ن} حيث أ$_{٠}$، أ$_{١}$، أ$_{٢}$، ... أ$_{ن}$ ∈ ح
ن ∈ ط، أ$_{ن}$ ≠ ٠، تسمى كثيرة حدود حقيقية من الدرجة ن.

وتكون: درجة كثيرة الحدود هي أكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة.



١. أي من الدوالِّ التالية تمثل كثيرة حدود:

أ) د$_{١}$(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٣ ب) د$_{٢}$ (س) = س^{٣} + $\frac{١}{س}$ + ٧

جـ) د$_{٣}$ (س) = س^{٢} + $\sqrt[٧]{س}$ + ٨ د) د$_{٤}$ (س) = س (س + $\frac{١}{س}$ − ٢)

٢. إذا كانت د: ح ← ح فاذكر درجة الدالة في كل حالة:

أ) د (س) = ٣ − ٢ س ب) د (س) = س^{٢} − (س^{٢} − ٣)

جـ) د (س) = س (س − ٢س^{٢}) د) د (س) = س^{٢} (س − ٣)^{٢}



مثال ١

إذا كان د(س) = $س^٢$ - س + ٣ أوجد: د (-٢) ، د (٠) ، د ($\sqrt{٣}$)

الحل

∵ د (س) = $س^٢$ - س + ٣ ∴ د (-٢) = $(-٢)^٢$ - (-٢) + ٣ = ٤ + ٢ + ٣ = ٩

د (٠) = ٣ ، د ($\sqrt{٣}$) = $(\sqrt{٣})^٢$ - $\sqrt{٣}$ + ٣ = ٦ - $\sqrt{٣}$

تدرب

إذا كانت: د (س) = $س^٢$ - ٣ س ر (س) = س - ٣

أ أوجد: د ($\sqrt{٢}$) + ٣ ر ($\sqrt{٢}$) ب اثبت د (٣) = ر (٣) = صفر

الدالة الخطية

تعريف

الدالة د : ح ← ح حيث د(س) = أ س + ب ، أ، ب ∈ ح، أ ≠ ٠ تسمى هذه الدالة دالة خطية، أو دالة من الدرجة الأولى.

التمثيلُ البياني للدالة الخطيَّة:



مثال ٢

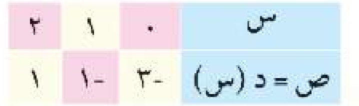
مثِّل بيانيًا الدالة د: ح ← ح، د (س) = ٢ س - ٣

الحل

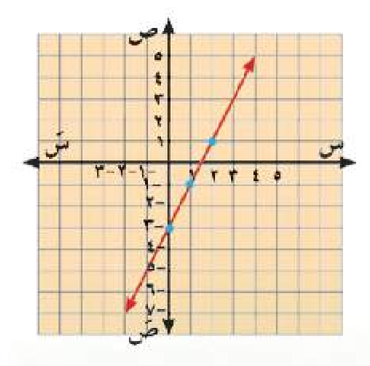
∵ د (س) = ٢ س - ٣

∴ د (٠) = ٠ - ٣ = -٣، د (١) = ٢ - ٣ = -١ ، د (٢) = ٤ - ٣ = ١

يمكن وضعُ هذه الأزواج المرتبة داخلَ جدول كالآتي:



س	٠	١	٢
ص = د (س)	-٣	-١	١



وتمثّل الأزواجُ المرتبةُ على الشبكةِ التربيعية لحاصلِ الضرب الديكارتي ح × ح



ملاحظات:

١ يكتفى بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة ، و يفضل إيجاد زوج مرتب ثالث للتَّحقق من صحةِ التمثيل البياني للدالة.

٢ إذا كانت د : ع ← ع، د (س) = أ س، حيث أ ≠ ٠ فإنه يمثلها بيانيًّا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)



مثِّل بيانيًّا كل من الدوال الآتية:

١ د: د (س) = س + ٢ ٢ ر : ر (س) = ٣ س ٣ ق : ق (س) = - ٢ س



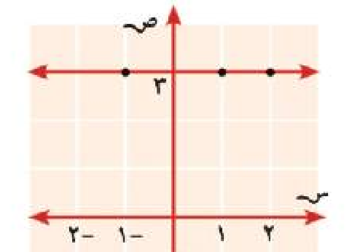
حالة خاصة: إذا كانت د : ع ← ع ، د (س) = ب حيث ب ∈ ع

فإن د تُسمىّ دالةً ثابتةً.

فمثلاً: د (س) = ٣ وتكتب ص = ٣

تمثل بمستقيم يوازي محور السينات.

س	-١	١	٢
ص = د (س)	٣	٣	٣





مثل الدوال التالية بيانيًا

١ د (س) = ٥ ٢ د (س) = -٤ ٣ د(س) = ٠ ٤ د (س) = $\frac{١}{٢}$ ٢

الدالةُ التَّربيعيةُ

الدالة د : ع ← ع حيث د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ، أ، ب، جـ أعداد حقيقية، أ ≠ ٠ تُسمى دالة تربيعية. وهي دالة من الدرجة الثانية.

التمثيل البياني للدالة التربيعية.



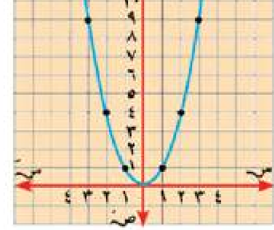
مثل بيانيًّا الدالةَ التربيعيةَ د، حيث د (س) = س^{٢}، س ∈ ع متخذًا س ∈ [-٣، ٣]

الحل

نعين بعضَ الأزواج المرتَّبة (س، د (س)) التي تنتمي إلى بيانِ الدالة د حيث س ∈ ع وأن الفترة [-٣، ٣] تعطي بعضَ القيم الممكنة للمتغير س.

د(-٣) = ٩ ،د (-٢) = ٤، د (-١) = ١، د(٠) = ٠، د (١) = ١، د (٢) = ٤، د (٣) = ٩

نضعُ هذه الأزواجَ المرتبةَ في جدولٍ كالآتي:



س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

نعيِّن في المستوى الديكارتي النقاطَ التي تُمثِّل هذه الأزواجَ المرتبة. ثم نرسمُ منحنيًا ممهدًا يمرُّ بهذه النقاط.

لاحظ أن:

(١) منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل س = ٠

(٢) إحداثي رأسى المنحنى (٠، ٠) والقيمة الصغرى للدالة = ٠

بصفه عامه الداله د (س) = ا س٢ + ب س + جـ ، ا، ب، جـ أعداد حقيقيه ، ا ≠ صفر يكون لها الخصائص اللأتيه:

(١) **إحداثيات نقطة رأس المنحنى = ($\frac{-ب}{٢ا}$ ، د ($\frac{-ب}{٢ا}$))**

(٢) **منحنى الداله يكون مفتوح إلى أعلى ∪ عندما يكون معامل س٢ موجباً (ا > صفر) وفي هذه الحالة يكون للدالة قيمة صغرى تساوي د ($\frac{-ب}{٢ا}$)**

(٣) **منحنى الدالة يكون مفتوح إلى أسفل ∩ عندما يكون معامل س٢ سالباً (ا < صفر) وفي هذه الحاله يكون للداله قيمه عظمى تساوي د ($\frac{-ب}{٢ا}$)**

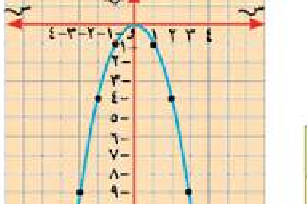
(٤) **منحنى الدالة د (س) يكون متماثلاً حول الخط الرأسي المار بنقطة رأس المنحنى و تكون معادلة هذا الخط س = $\frac{-ب}{٢ا}$ ويسمى هذا الخط محور تماثل الداله.**



مثِّل بيانيًّا الدالةَ التربيعيةَ د حيث: د (س) = - س٢، س ∈ ح متخذًا س ∈ [- ٣، ٣]

الحل

نكرِّر نفس خطوات الحل السابقة:



س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ص = د (س)	٩-	٤-	١-	٠	١-	٤-	٩-

ومن الرسم نلاحظ أن:

(١) منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل س = ٠

(٢) إحداثي رأس المنحنى (٠، ٠) والقيمة العظمى للدالة = ٠


الجبر
الوحدة الثانية: النسبة والتناسب
والتغير الطردى والتغير العكسى
هل تعلم ؟
أن وزن الجسم على سطح القمر يساوى $\frac{1}{6}$ وزنه على سطح الأرض
تصور أنك ذهبت فى رحلة للقمر ؛ كم سيصبح وزنك؟



النسبة



سوف تتعلم

☆ مفهوم النسبة.

☆ خواص النسبة.

المصطلحات الأساسية

☆ مقدم النسبة.

☆ تالى النسبة.

☆ حدّا النسبة.

فكر وناقش

درسنا فيما سبق موضوع النسبة، وعلمنا أن النسبة هى: مقارنة بين كميتين.

فمثلاً: إذا كان هناك ٤ أولاد، ٣ بنات، فإن النسبة بين عدد الأولاد إلى عدد البنات يمكن كتابتها بإحدى الصور ٤ إلى ٣ أو $\frac{٤}{٣}$

وعمومًا إذا كان أ، ب عددين حقيقيين **فإن النسبة**

بين العدد أ والعدد ب

تكتب بإحدى الصور: أ إلى ب أو أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

ويسمى أ مقدم النسبة، ويسمى ب تالى النسبة، ويسمى أ، ب معًا **بحدى النسبة.**

أكمل وأجب عن الأسئلة:

١ هل تتغير النسبة إذا ضرب كل من حديها فى مقدار ثابت لا يساوى الصفر؟

$$\frac{٣}{٥} \overset{?}{=} \frac{٣ \times ....}{٥ \times ....}$$

٢ هل تتغير النسبة إذا أضفنا عددًا حقيقيًا لكل من حديها؟

$$\frac{٢}{٣} \overset{?}{=} \frac{٢ + ...}{٣ + ...}$$

٣ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$، هل أ = ٣، ب = ٥ لجميع قيم أ، ب؟



مثال (١)

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد س.

$\therefore \frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{٢}{٣}$ $\therefore$ ٣ (س + ٧) = ٢ (س + ١١)

$\therefore$ ٣ س + ٢١ = ٢ س + ٢٢ $\therefore$ ٣ س - ٢ س = ٢٢ - ٢١

$\therefore$ س = ١

مثال (٢)

أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة ٢٩ :٤٦ وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل علي النسبة ٣:٢

الحل

نفرض ان العدد المطلوب = س حيث س $\in$ ح$_+$ $\therefore$ مربعه = س^٢

$\therefore \frac{٢٩ + س^٢}{٤٦ - س^٢} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ ٢ (٢٩ + س^٢) = ٣ (٤٦ - س^٢)

٥٨ + ٢ س^٢ = ١٣٨ - ٣ س^٢ $\therefore$ ٥س^٢ = ٨٠

$\therefore$ س^٢ = ١٦ $\therefore$ س = ٤

٢ - ٢

التناسب



سوف تتعلم

- ☆ مفهوم التناسب
- ☆ خواص التناسب
- ☆ التناسب المتسلسل

المصطلحات الأساسية

- ☆ تناسب
- ☆ أول متناسب
- ☆ ثانى متناسب
- ☆ ثالث متناسب
- ☆ رابع متناسب
- ☆ طرفا التناسب
- ☆ وسطا التناسب

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه **يقال أن** أ، ب، جـ، د كميات متناسبة، و إذا كانت الكميات أ، ب، جـ، د متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

تعريف:

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر.

فى التناسب $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن أ يسمى **(الأول المتناسب)**، ب يسمى **(الثانى المتناسب)**، جـ يسمى **(الثالث المتناسب)**، د يسمى **(الرابع المتناسب)**.

كما يسمى أ، د **طرفى التناسب**، ب، جـ **وسطى التناسب**.

خواص التناسب

أولاً: إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن:

(١) أ = م جـ ، ب = م د حيث م ∈ ح*

(٢) أ د = ب جـ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

(٣) $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

تحقق من الخواص السابقة بإعطاء أمثلة عددية من عندك

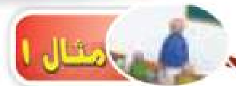
ثانيًا: إذا كان: أ د = ب جـ فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

تحقق من الخواص بالمثال العددى الآتى:

تعلم أن: ٤ × ٨ = ٢ × ١٦

فإن: $\frac{٤}{٢} = \frac{.....}{.....}$ ، $\frac{٤}{١٦} = \frac{.....}{.....}$





إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة النسبة: $\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س}$

الحل

نفرض أن س = ٢م، ص = ٣م (حيث م ثابت ≠ صفر)

$\therefore \frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٦ \times ٣م - ٢م} = \frac{١٢م}{١٦م} = \frac{٣}{٤}$

حل آخر:

بقسمة كل من البسط والمقام على ص ثم التعويض عن قيمة $\frac{س}{ص}$

$\therefore$ المقدار $= \frac{٣ \times \frac{س}{ص} + ٢}{٦ - \frac{س}{ص}} = \frac{٣ \times \frac{٢}{٣} + ٢}{٦ - \frac{٢}{٣}}$ ← **أكمل** $= \frac{...}{\frac{...}{...}} = \frac{...}{...}$



أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤، ١٢، ١٦

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب س

$\frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$

$\therefore ٤ \times س = ١٢ \times ١٦$ [حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين]

$\therefore$ س $= \frac{١٢ \times ١٦}{٤} = ٤٨$ $\therefore$ الرابع المتناسب = ٤٨



أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣، ٥، ٨، ١٢ فإنها تكون متناسبة.

الحل

نفرض أن العدد س فتكون الأعداد ٣ + س، ٥ + س، ٨ + س، ١٢ + س **متناسبة**

$\therefore \frac{٣ + س}{٥ + س} = \frac{٨ + س}{١٢ + س}$ $\therefore$ (٥ + س) (٨ + س) = (٣ + س) (١٢ + س)

$\therefore ٤٠ + ١٣س + س^٢ = ٣٦ + ١٥س + س^٢$ $\therefore$ ١٥س - ١٣س = ٤٠ - ٣٦

$\therefore$ ٢س = ٤ $\therefore$ س = ٢



① أ أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢، .... ، ٤، ٦

ب أوجد الثالث المتناسب للأعداد ٨، ٦، .... ، ١٢

② إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة ٧ أ + ٩ ب : ٤ أ + ٢ ب

ثالثاً: إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ...$ ، $م_١، م_٢، م_٣، ... \in ح^*$

فإن: $\frac{أ م_١ + جـ م_٢ + هـ م_٣ + ...}{ب م_١ + د م_٢ + و م_٣ + ...}$ = إحدى النسب

فمثلا: إذا كان: $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤}$ بضرب حدى النسبة الأولى فى ٢ وحدى النسبة الثانية فى -٥ وحدى النسبة الثالثة فى ٣ $\therefore \frac{٢أ - ٥ب + ٣جـ}{٢ \times ٢ - ٣ \times ٥ + ٣ \times ٤}$ = إحدى النسب

أى أن: ٢أ - ٥ب + ٣جـ = إحدى النسب



إذا كانت: أ، ب، جـ، د كميات متناسبة **فأثبت أن:** $\frac{٣أ - ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$

الحل

$\because$ إذا كانت: أ، ب، جـ، د كميات متناسبة $\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

بضرب حدى النسبة الأولى فى ٥ والثانية فى ٣ فإن مجموع المقدمات: مجموع التوالى = إحدى النسب.

$\therefore \frac{٥أ + ٣جـ}{٥ب + ٣د}$ = إحدى النسب (١)

بضرب حدى النسبة الأولى فى ٣ والثانية فى -٢ فإن مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب.

$\therefore \frac{٣أ - ٢جـ}{٣ب - ٢د}$ = إحدى النسب (٢)

من (١)، (٢) $\therefore \frac{٥أ + ٣جـ}{٥ب + ٣د} = \frac{٣أ - ٢جـ}{٣ب - ٢د}$

$\therefore \frac{٣أ - ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$ (وهو المطلوب إثباته)



حل آخر:

افرض $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ م حيث م مقدار ثابت

أ = ب م ، جـ = د م وعوض فى كلا الطرفين.



إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ **فأثبت أن:**

أولاً: $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$ **ثانيًا:** $\frac{أ - ب}{ب} = \frac{جـ - د}{د}$

إرشاد: افرض أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} =$ م حيث م مقدار ثابت ≠ ٠ وأكمل

أو بأى طريقة أخرى.

التناسب المتسلسل

٢، ٦، ١٨ ثلاثة أعداد. قارن بين النسب $\frac{٢}{٦}$، $\frac{٦}{١٨}$

١ هل توجد علاقة بين $(٦)^٢$ وحاصل الضرب ٢ × ١٨؟

٢ إذا استبدل العدد ٦ بالعدد (-٦) هل توجد علاقة بين $(-٦)^٢$ وحاصل الضرب ٢ × ١٨؟

تعريف:

يقال للكميات أ، ب، جـ: إنها فى تناسب متسلسل إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

يسمى أ بالأول المتناسب، ب بالوسط المتناسب، جـ بالثالث المتناسب

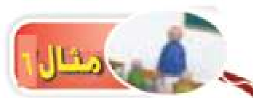
حيث: $ب^٢ =$ أجـ أو ب = ± $\sqrt{أجـ}$



أوجد الوسط المتناسب بين ٣، ٢٧

الحل

الوسط المتناسب = $\pm \sqrt{٣ \times ٢٧} = \pm ٩$



إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فأثبت أن:** $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$

الحل

ب وسط متناسب بين أ، جـ

أي أ، ب، جـ في تناسب متسلسل

نفرض $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

$\therefore$ ب = جـ م، أ = ب م = جـ م × م = جـ م^٢

الطرف الأيمن = $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{جـ^٢ م^٤ + جـ^٢ م^٢}{جـ^٢ م^٢ + جـ^٢}$

$= \frac{جـ^٢ م^٢ (م^٢ + ١)}{جـ^٢ (م^٢ + ١)} = م^٢$ (١)

الطرف الأيسر = $\frac{أ}{جـ} = \frac{جـ م^٢}{جـ} = م^٢$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$

حل آخر:

بفرض: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ ∴ $\frac{أ^{٢}}{ب^{٢}} = \frac{ب^{٢}}{جـ^{٢}} = م^{٢}$

من النسبتين الأولى والثانية $م^{٢} = \frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + جـ^{٢}}$ = الطرف الأيمن

، $م^{٢} = \frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ}$ = الطرف الأيسر

من (١)، (٢) ∴ $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + جـ^{٢}} = \frac{أ}{جـ}$

مثال (٧) أكمل مايأتي :

١ - إذا كانت : ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ في تناسب متسلسل

فإن : $س^{٢}ص$ = ...

٢ - الوسط المتناسب للكميتين ٩ $س^{٢}$ - ٢٥ $ص^{٢}$ ، $\frac{٣ س + ٥ ص}{٣ س - ٥ ص}$ هو ....

الحل

١ - ∵ ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ في تناسب متسلسل فإن $\frac{٧}{س}$ = س ص

∴ $س^{٢}$ ص = ٧

٢ - ∵ ٩ $س^{٢}$ - ٢٥ $ص^{٢}$ ، م ، $\frac{٣ س + ٥ ص}{٣ س - ٥ ص}$ في تناسب متسلسل

حيث م الوسط المتناسب

∴ $\frac{٩ س^{٢} - ٢٥ ص^{٢}}{م} = \frac{م (٣ س - ٥ ص)}{٣ س + ٥ ص}$ ∴ $م^{٢} = (٣ س + ٥ ص)^{٢}$

∴ م = ± (٣ س + ٥ ص)

٢ - ٣

التغير الطردى و التغير العكسى



سوف تتعلم

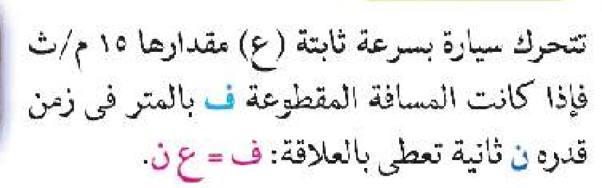
- مفهوم التغير الطردى
- مفهوم التغير العكسى
- كيفية التمييز بين التغير الطردى والتغير العكسى.

المصطلحات الأساسية

- تغير
- تغير طردى
- تغير عكسى

أولا: التغير الطردى

فكر وناقش (١)



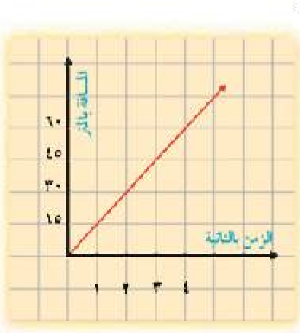
تتحرك سيارة بسرعة ثابتة (ع) مقدارها ١٥ م/ث فإذا كانت المسافة المقطوعة ف بالمتر فى زمن قدره ن ثانية تعطى بالعلاقة: ف = ع ن.

ن	١	٢	٣	٤
ف	١٥	٣٠	٤٥	٦٠

أ) مثّل العلاقة بين ف، ن بيانيًا.

ب) هل التمثيل البيانى يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)؟

جـ) أوجد $\frac{ف}{ن}$ فى كل حالة. ماذا تلاحظ؟



نلاحظ مما سبق أن:

$\frac{ف}{ن}$ تساوى فى كل مرة مقدارًا ثابتًا وهو ١٥

أى: ف = ١٥ ن ويقال حينئذ إن ف تتغير طرديًا بتغير ن وتكتب رمزيًا ف ∝ ن.

تعريف:

يقال: إن ص تتغير طرديًّا مع س وتكتب ص ∝ س إذا كانت ص = م س (حيث م ثابت ≠ ٠) وإذا أخذ المتغير س القيمتين $س_١$، $س_٢$ وأخذ المتغير ص القيمتين $ص_١$، $ص_٢$ على الترتيب فإن: $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$



مما سبق نستنتج أن:

(١) العلاقة السابقة علاقة خطية بين المتغيرين س، ص ويمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

(٢) إذا كانت ص ∝ س فإن ص = م س وكذلك إذا كانت ص = م س فإن ص ∝ س



إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ **فأوجد**

أولاً: العلاقة بين ص، س **ثانيًا:** قيمة ص عندما س = ٦٠

الحل

أولاً: ∵ ص ∝ س ∴ ص = م س (حيث م ثابت ≠ ٠)

وبالتعويض عن قيمتي س، ص في العلاقة

∴ ١٤ = ٤٢ × م ∴ م = $\frac{١٤}{٤٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ∴ العلاقة هي: ص = $\frac{١}{٣}$ س

ثانيًا: عندما س = ٦٠ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ × ٦٠ = ٢٠

ملاحظة: يمكن استخدام العلاقة $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$ لإيجاد قيمة ص في المطلوب الثاني

ثانياً: التغير العكسي

إذا كانت مساحة المستطيل م وأحد بعديه س والبعد الآخر ص.

أ **اكتب** العلاقة بين كل من م ، س ، ص.

ب إذا كانت مساحة المستطيل ثابتة وتساوي ٣٠ سم^٢ **فأكمل** الجدول الآتي:

س	٣	٥	٦	١٠
ص	....	....	....	....

جـ **أوجد** س ص في كل حالة. ماذا تلاحظ؟

مما سبق نلاحظ أن:

س ص = ٣٠ أي أن: ص = $\frac{٣٠}{س}$ أي أن ص تتغير عكسيًا بتغير س وتكتب رمزيًا ص ∝ $\frac{١}{س}$

وبالمثل: س = $\frac{٣٠}{ص}$ أي أن: س تتغير عكسيًا بتغير ص وتكتب رمزيًا س ∝ $\frac{١}{ص}$

تعريف:

يقال إن ص تتغير عكسيًا مع س وتكتب ص $\propto \frac{1}{س}$ إذا كانت س ص = م (حيث م ثابت ≠ ٠)

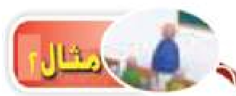
وإذا أخذ المتغير س القيمتين $س_1$، $س_2$ وتبعًا لذلك أخذ المتغير ص القيمتين $ص_1$، $ص_2$ على الترتيب فإن: $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

مما سبق نستنتج أن:

١) العلاقة السابقة ليست علاقة خطية بين المتغيرين س، ص ولا يمثلها خط مستقيم.

٢) إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س فإن: ص = $\frac{م}{س}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

وكذلك إذا كانت ص = $\frac{م}{س}$ فإن ص $\propto \frac{1}{س}$.



إذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢

أولاً: أوجد العلاقة بين س، ص. **ثانيًا: أوجد** قيمة ص عندما س = ١,٥.

الحل

∵ ص $\propto \frac{1}{س}$ ∴ ص = $\frac{م}{س}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

وبالتعويض عن قيمتي س، ص في العلاقة

∴ ٣ = $\frac{م}{٢}$ ∴ م = ٢ × ٣ = ٦

∴ العلاقة هي: ص = $\frac{٦}{س}$

عندما س = ١,٥ ∴ ص = $\frac{٦}{١,٥}$ = ٤

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة ص من العلاقة $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$





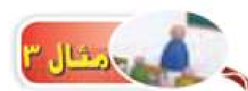
بين أى من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًّا، وأيها يمثل تغيرًا عكسيًّا، وأيها لا يمثل تغيرًا طرديًّا أو عكسيًّا مع ذكر السبب فى كل حالة:

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢
٤	١٥
٦	١٠

س	ص
٢	٩
٤	١٨
١٢	٥٤
١٦	٧٢

س	ص
٥	٩
١٠	١٨
١٥	٢٧
٢٥	٤٥

س	ص
٣	٦
-٢	-٩
-١٨	١
٩	-٢



الربط بالفيزياء: إذا كانت العلاقة بين السرعة ع (متر / ث) و الزمن ن (ثانية) هى ع = ٩,٨ ن

أولاً: **حدد** نوع التغير بين ع، ن.

ثانيًا: أ **أوجد** قيم ع عندما ن = ٢ ثانية ، ن = ٤ ثوانٍ

ب **أوجد** قيمة ن عندما ع = ٢٤,٥ متر/ث

الحل

أولاً: ∵ ع = ثابت × ن أى ع ∝ ن أى ع تتغير طرديًّا بتغير ن.

ثانيًا: أ عندما ن = ٢ تكون ع = ٩,٨ × ٢ = ١٩,٦ متر/ث

عندما ن = ٤ تكون ع = ٩,٨ × ٤ = ٣٩,٢ متر/ث

ب عندما ع = ٢٤,٥ تكون ٢٤,٥ = ٩,٨ × ن ∴ ن = $\frac{٢٤,٥}{٩,٨}$ = ٢,٥ ثانية.



الربط بالهندسة: إذا كان (ع) ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت) يتغير عكسيًّا بتغير مربع طول نصف قطرها (نق)، وكان ع = ٢٧ سم عندما نق = ١٠,٥ سم؛ **فأوجد** (ع) عندما نق = ١٥,٧٥ سم.

الحل



$\because$ ع $\propto \frac{1}{نق^2}$ $\quad$ $\therefore$ ع = م × $\frac{1}{نق^2}$ (حيث م ثابت ≠ ٠)

ع = ٢٧ عند نق = ١٠,٥

$\therefore$ ٢٧ = م × $\frac{1}{(10,5)^2}$ $\quad$ $\therefore$ م = ٢٧ × $(10,5)^2$ (١)

وبالتعويض $\quad$ $\therefore$ ع = ٢٧ × $(10,5)^2$ × $\frac{1}{نق^2}$ من (١)

وعندما نق = ١٥,٧٥ سم $\quad$ $\therefore$ ع = ٢٧ × $(10,5)^2$ × $\frac{1}{(15,75)^2}$ = ١٢ سم

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد الخطوة الأخيرة كما يلي:

27 × 10.5 x^2 ÷ 15.75 x^2 =

مثال (٥)

الربط مع الكيمياء : إذا كانت العلاقة بين كل من الكثافة (ث) و الكتلة (ك) و الحجم (ح) هي

ث = $\frac{م ك}{ح}$ ، (حيث م ثابت ≠ ٠)

أولاً : حدد نوع التغيير بين ث ، ك ونوع التغيير بين ث ، ح

ثانياً : أوجد قيمة م إذا كان ث = ٦ جم / سم^3 ، ك = ٣٠ جم ، ح = ٧ سم^3

ثالثاً : أوجد قيمة ح إذا كان ك = ٤,٥ كجم ، ث = ٩ كجم / م^3

الحل

أولاً : الكثافة (ث) تتناسب طردياً مع الكتلة (ك) ، تتناسب عكسياً مع الحجم (ح)

ثانياً : ث = $\frac{م ك}{ح}$ ⟵ ٦ = $\frac{م (30)}{7}$ ⟵ م = $\frac{42}{30}$ = $\frac{7}{5}$

ثالثاً : وعندما ك = ٤,٥ كجم ، ث = ٩ كجم / م^3 $\quad$ $\therefore$ ٩ = $\frac{7 \times 4,5}{5 ح}$

$\therefore$ ح = $\frac{7 \times 0,9}{9}$ = ٠,٧ م^3



مطعم للمثلجات يقدم أنواعًا مختلفة منها. قام صاحب المطعم بعمل استطلاع للرأى عن أنواع المثلجات المفضلة لدى المستهلكين.

ستساعدك دراسة علم الإحصاء فى اختيار عينة ممثلة لمجتمع المستهلكين.



جمع البيانات



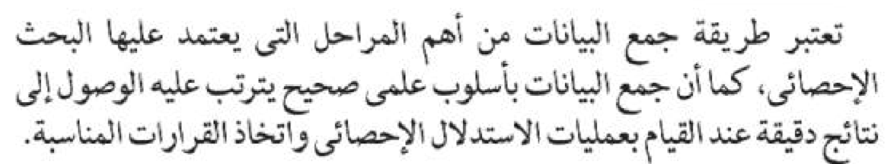
سوف تتعلم

☆ أنواع مصادر جمع البيانات.
☆ أساليب جمع البيانات.
☆ كيفية اختيار عينة.
☆ أنواع العينات.

المصطلحات الأساسية

☆ مصادر أولية.
☆ مصادر ثانوية.
☆ أسلوب الحصر الشامل.
☆ أسلوب العينات.
☆ اختيار متحيز.
☆ اختيار عشوائي.
☆ عينة.
☆ عينة عشوائية.
☆ عينة طبقية.

فكر و ناقش



تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التى يعتمد عليها البحث الإحصائى، كما أن جمع البيانات بأسلوب علمى صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة عند القيام بعمليات الاستدلال الإحصائى واتخاذ القرارات المناسبة.

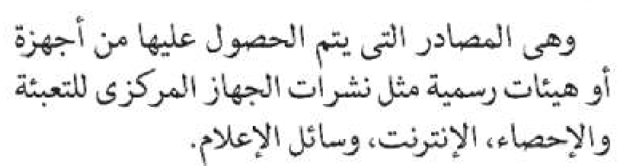
١ ما مصادر جمع البيانات؟ ٢ كيف يتحدد أسلوب جمع البيانات؟

مصادر جمع البيانات

١ مصادر أولية (مصادر ميدانية):

وهى المصادر التى نحصل منها علي البيانات بشكل مباشر، حيث تجمع البيانات عن طريق المقابلة الشخصية أو الاستبيان (استطلاع الرأى) و يتميز هذا النوع من المصادر بالدقة إلا أنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير كما أنها مكلفة من الناحية المادية.

٢ مصادر ثانوية (مصادر تاريخية):



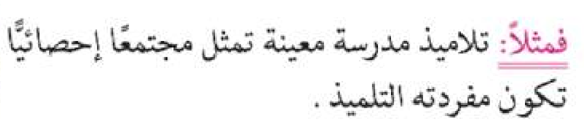
وهى المصادر التى يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية مثل نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والإحصاء، الإنترنت، وسائل الإعلام.

و يتميز هذا النوع من المصادر بتوفير الوقت والجهد والمال.

أسلوب جمع البيانات

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعًا للهدف وحجم المجتمع الإحصائى محل البحث. و يعرف المجتمع الإحصائى بأنه جميع المفردات التى يجمعها خصائص عامة واحدة.







فمثلاً: تلاميذ مدرسة معينة تمثل مجتمعًا إحصائيًا تكون مفردته التلميذ .

أولا: أسلوب الحصر الشامل:



ويعنى جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائى، ويستخدم لحصر جميع مفردات المجتمع مثل التعداد العام للسكان. ويتميز هذا الأسلوب بالشمول وعدم التحيز ودقة النتائج.

ومن عيوب الحصر الشامل أنه يحتاج إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة باهظة.

ثانيًا: أسلوب العينات:

ويقوم على فكرة اختيار عينة من المجتمع الإحصائى الذى تمثله، ونجرى البحث على العينة، وما نحصل عليه من نتائج يتم تعميمه على المجتمع بأكمله.

مزايا أسلوب العينات:

١. توفير الوقت والجهد والتكاليف.
٢. الطريقة الوحيدة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة (مجتمع الأسماك مثلاً).
٣. الأسلوب الوحيد لدراسة بعض المجتمعات المحدودة فى بعض الأحيان مثل:
   - أ. فحص دم مريض من خلال عينة (لأن فحص الدم كله يؤدى إلى الوفاة).
   - ب. فحص إنتاج مصنع للمصابيح الكهربية من خلال عينة لتحديد عمر المصباح. (معرفة العمر الزمنى للمصباح الكهربى يقتضى إشعاله حتى احتراقه).

ومن عيوب أسلوب العينات عدم دقة النتائج إذا كانت العينة المختارة لاتمثل المجتمع تمثيلاً جيدًا (صادقًا)، وتسمى **بالعينة المتحيزة**.

كيفية اختيار العينات والشروط الواجب توافرها فى العينة :

أولاً: الاختيار المتحيز (العينات غير العشوائية)



وهو اختيار العينة بطريقة تناسب أهداف البحث، وتعرف بالعينة العمدية، فمثلاً عند دراسة مدى استيعاب التلاميذ لموضوع ما فى مادة الرياضيات، يجب أن نحلل نتائج الاختبار فى ذلك الموضوع لتلاميذ سبق لهم دراسة الموضوع نفسه دون سائر التلاميذ، ولايعتبر هذا الاختيار عشوائيًا.

ثانيًا: الاختيار العشوائى (العينات العشوائية)

وهو اختيار العينة بحيث تكون فرص ظهور أى من مفردات المجتمع فيها متساوية.

ومن أهم أنواع العينات العشوائية:

(١) العينة العشوائية البسيطة:

هى أبسط أنواع العينات، ويتم سحبها من المجتمعات المتجانسة، ويتوقف اختيارها على حجم، وعدد وحدات المجتمع.

(أ) إذا كان حجم المجتمع صغيرًا:



عند اختيار عينة من خمسة تلاميذ من فصل ٤٠ تلميذًا فإنه يمكن إعداد بطاقة لكل تلميذ يكتب عليها اسمه (أو رقمه)، بحيث تكون البطاقات كلها متماثلة ، ثم توضع فى صندوق ، وتسحب بطاقة من الصندوق عشوائيًا، ثم تعاد البطاقة مرة أخرى للصندوق . وتكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة.

(ب) إذا كان حجم المجتمع كبيرًا:



بفرض أنه يراد اختيار العينة (٥تلاميذ) من بين تلاميذ المدرسة كلها والبالغ عددهم ٨٠٠ تلميذ،فتكون عملية الاختيار عن طريق البطاقات عملية شاقة ؛فيتم ترقيم أسماء التلاميذ من ١ إلى ٨٠٠ ، ثم استخدام الآلة الحاسبة (أو برنامج EXCEL) فى إنتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠٠ إلى ٠,٩٩٩ ومع إهمال العلامة العشرية ليصبح النطاق من صفر إلى ٩٩٩ ، ويمكن تجاهل الأرقام العشوائية التى تزيد على ٨٠٠ كما يلى :



ومع تكرار الضغط على مفتاح [=] تتوالى ظهور الأرقام ونكتفى بخمسة أرقام غير متكررة لتعطى أرقام تلاميذ العينة.

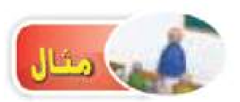


٢ العينة العشوائية الطبقية:

عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس؛ أى يتكون من مجموعات نوعية تختلف فى الصفات، فيقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعًا للصفات المكونة له، وتسمى كل مجموعة بطبقة، ويختار الباحث عينة عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فى المجتمع، وتعرف بالعينة الطبقية.



مثال: عند دراسة المستوى التعليمى لمجتمع ما مكون من ٤٠٠ شخص بحيث تكون نسبة الذكور إلى الإناث ٣ : ٢، وأردنا اختيار عينة من ٥٠ شخصًا؛ فلابد أن نختار ٣٠ شخصًا من طبقة الذكور، ٢٠ شخصًا من طبقة الإناث، بطريقة عشوائية.



مصنع به ٥٠٠ عامل ويريد المسئولون عن المصنع معرفة آراء العاملين فى نظام ساعات الإضافى من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض يُعطى هذا الاستبيان لعينة عشوائية ١٠٪ من إجمالى عدد العاملين بهذا المصنع. وضح كيف يتم اختيار هذة العينة باستخدام الألة

الحل

∵ عدد العاملين بالمصنع = ٥٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٥٠٠ = ٥٠ عاملاً

أي أننا نريد اختيار ٥٠ عاملاً لإجراء هذا الأستبيان ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية كما يلى :

١- يعطى كل عامل من العاملين بالمصنع رقماً من ١ إلى ٥٠٠

٢- تستخدم الألة الحاسبة العلمية لاختيار ٥٠ رقماً بالطريقة السابق ذكرها والتى تنحصر بين ١ ، ٥٠٠ والأرقام العشوائية التى تظهر اكبر من ٥٠٠ يتم استبعادها.

ناقش معلمك فى الحل

٣ - ٢

التشتت



سوف تتعلم

- ☆ مقاييس التشتت (المدى - الانحراف المعيارى)

مصطلحات أساسية

- ☆ نزعة مركزية.
- ☆ وسط حسابي.
- ☆ تشتت.
- ☆ مدى.
- ☆ انحراف معياري.

فكر وناقش

سبق لك دراسة مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى، الوسيط، المنول) وأمكنك حسابها لأية مجموعة من البيانات لتعيين قيمة واحدة تصف اتجاه هذه البيانات فى التمركز حول هذه القيمة.



فإذا كان الأجر الأسبوعى بالجنيهات لمجموعتين من العمال أ، ب فى أحد المصانع كما يلى:

مجموعة أ: ١٧٠، ١٨٠، ١٨٠، ٢٣٠، ٢٤٠

مجموعة ب: ٥٠، ١٨٠، ١٨٠، ١٩٠، ٤٠٠

١ **أوجد** الوسط الحسابى لأجور كل من المجموعتين أ، ب.

٢ **قارن** بين أجور المجموعتين أ، ب. **ماذا تستنتج؟**

تعلم أن: الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

فيكون:

الوسط الحسابى لأجور المجموعة أ = $\frac{١٧٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ٢٣٠ + ٢٤٠}{٥}$

= $\frac{١٠٠٠}{٥}$ = ٢٠٠ جنيه

الوسط الحسابى لأجور المجموعة ب = $\frac{٥٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ١٩٠ + ٤٠٠}{٥}$

= $\frac{١٠٠٠}{٥}$ = ٢٠٠ جنيه

وللمقارنة بين أجور المجموعتين أ، ب نجد أن:

١ الوسط الحسابى لأجور المجموعة أ = الوسط الحسابى لأجور المجموعة ب = ٢٠٠ جنيه

٢ الأجر الوسيط = الأجر المنوالى = ١٨٠ جنيهًا لكل من المجموعتين أ، ب.

ويلاحظ أن:

(١) مجموعتى الأجور مختلفتان ولكن لهما نفس مقاييس النزعة المركزية.

(٢) أجور المجموعة أ متقاربة فتنحصر مفرداتها بين ١٧٠، ٢٤٠ جنيهًا، بينما أجور المجموعة ب متباعدة فتنحصر مفرداتها بين ٥٠، ٤٠٠ جنيه.

أى أن أجور المجموعة ب أكثر تشتتًا من أجور المجموعة أ.

لذلك عند المقارنة بين مجموعتين يجب مراعاة تشتت قيم كل من المجموعتين وتباعدها عن بعضها.

التشتت: لأى مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها، ويكون التشتت صغيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلاً، ويكون التشتت كبيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيرًا (أي إذا كانت الفروق بين القيم كبيرة)، كما يكون التشتت صفرًا إذا تساوت جميع المفردات.

أى إن التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

مما سبق نستنتج أنه :

لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة المركزية وآخر للتشتت لكل مجموعة.

مقاييس التشتت

(١) المدى : (أبسط مقاييس التشتت)

وهو الفرق بين أكبر المفردات وأصغرها فى المجموعة وبمقارنة المجموعتين التاليتين:

المجموعة الأولى: ٥١، ٥٣، ٥٥، ٥٧، ٥٨، ٦٠

المجموعة الثانية: ٤٢، ٤٥، ٤٧، ٤٩، ٥٢، ٩٢

نجد أن مدى المجموعة الأولى = ٦٠ - ٥١ = ٩

مدى المجموعة الثانية = ٩٢ - ٤٢ = ٥٠

وعلى هذا نعتبر **المجموعة الثانية أكثر تشتتًا من المجموعة الأولى.**

لاحظ أن:

(١) المدى هو أبسط وأسهل طرق قياس التشتت.

(٢) يتأثر المدى تأثرًا كبيرًا بالقيم المتطرفة.

فمن الواضح أن مفردات المجموعة الثانية تتشتت فى مدى ٥٠، وعند استبعاد المفردة الأخيرة (٩٢) منها **فإن المدى** = ٥٢ - ٤٢ = ١٠ أي $\frac{1}{5}$ المدى السابق حسابه.



(٣) نظرًا لعدم تأثر المدى بأى مفردة فى المجموعة عدا المفردتين الكبرى والصغرى،فقد لايعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة.

٢ الانحراف المعيارى:

أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها (تحت ظروف خاصة) وهو "**الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى**".

أى أن:

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$$

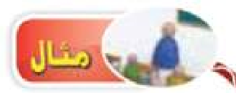
حيث ترمز: σ (سيجما) إلى الانحراف المعيارى لمجتمع البيانات.

$\overline{س}$ (سين Bar) إلى الوسط الحسابى لمفردات المجتمع.

ن إلى عدد المفردات.

مجـ إلى عملية الجمع.

أولا: حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات:



احسب الانحراف المعيارى للقيم الآتية: ١٢، ١٣، ١٦، ١٨، ٢١

الحل

لحساب الانحراف المعيارى نكوّن الجدول المقابل حيث:

$$\text{الوسط الحسابى } \overline{س} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

$$\therefore \overline{س} = \frac{\text{مجـ } س}{ن}$$

$$\overline{س} = \frac{١٢ + ١٣ + ١٦ + ١٨ + ٢١}{٥} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$$

$$\because \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{٥٤}{٥}} = \sqrt{١٠,٨} \simeq ٣,٢٨٦$$

	س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^{٢}$
	١٢	١٢ - ١٦ = -٤	١٦
	١٣	١٣ - ١٦ = -٣	٩
	١٦	١٦ - ١٦ = ٠	صفر
	١٨	١٨ - ١٦ = ٢	٤
	٢١	٢١ - ١٦ = ٥	٢٥
المجموع	٨٠		٥٤



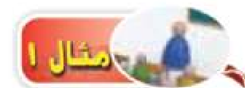
ثانيًا: حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى:

لأى توزيع تكرارى، يكون:

$$\text{الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \text{ك}}{\text{مجـ ك}}}$$

حيث: س تمثل القيمة أو مركز المجموعة ، ك تكرار القيمة أو المجموعة

مجـ ك مجموع التكرارات ، الوسط الحسابى $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$



فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفة التى وجدت فى ١٠٠ صندوق فى الوحدات المصنعة:

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة.



باعتبار عدد الوحدات التالفة (س) وعدد الصناديق المناظر لها (ك)

لحساب الانحراف المعيارى للوحدات التالفة نكوِّن الجدول التالى:

ويكون:

عدد الوحدات التالفة (س)	عدد الصناديق (ك)	س × ك	س - $\bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$ك
صفر	٣	صفر	-٣	٩	٢٧
١	١٦	١٦	-٢	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	-١	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	صفر	صفر	صفر
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
المجموع	١٠٠	٣٠٠			٢٠٤

الوسط الحسابى $\bar{\text{س}}$

$$= \frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$$

الانحراف المعيارى σ

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \text{ك}}{\text{مجـ ك}}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}} \simeq ١,٤٢٨ \text{ وحدة}$$



مثال ٢



التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٤٠ تلميذاً فى أحد الاختبارات لإحدى المواد:

المجموعات	-٠	-٤	-٨	-١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٢	٥	٨	١٥	١٠	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع.

الحل

١ نوجد مراكز المجموعات س

فيكون: مركز المجموعة الأولى = $\frac{٠ + ٤}{٢}$ = ٢

مركز المجموعة الثانية = $\frac{٤ + ٨}{٢}$ = ٦

وهكذا ونسجلها فى العمود الثالث.

٢ نضرب مراكز المجموعات × التكرارات المناظرة لها؛ أي س × ك ونسجلها فى العمود الرابع.

نوجد الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{مجـ س ك}{مجـ ك}$

٣ نوجد انحراف مركز كل مجموعة (س) عن الوسط الحسابى؛ أي نوجد $(س - \overline{س})$

٤ نوجد مربعات انحرافات مراكز المجموعة عن الوسط الحسابى؛ أي $(س - \overline{س})^٢$

٥ نوجد حاصل ضرب مربع انحراف مركز كل مجموعة عن الوسط الحسابى × تكرار هذه المجموعة؛ أي $(س - \overline{س})^٢ \times ك$

٦ نحسب الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢ ك}{مجـ ك}}$



فيكون:

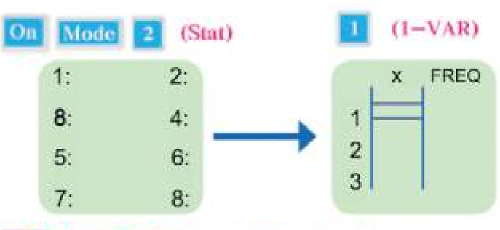
المجموعات	التكرار (ك)	مراكز المجموعات (س)	س × ك	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$)^٢	(س - $\bar{س}$)^{٢}ك
٠-	٢	٢	٤	١٠,٦-	١١٢,٣٦	٢٢٤,٧٢
٤-	٥	٦	٣٠	٦,٦-	٤٣,٥٦	٢١٧,٨٠
٨-	٨	١٠	٨٠	٢,٦-	٦,٧٦	٥٤,٠٨
١٢-	١٥	١٤	٢١٠	١,٤	١,٩٦	٢٩,٤٠
١٦-٢٠	١٠	١٨	١٨٠	٥,٤	٢٩,١٦	٢٩١,٦٠
المجموع	٤٠		٥٠٤			٨١٧,٦

الوسط الحسابى $\bar{س} = \frac{٥٠٤}{٤٠} = ١٢,٦$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{٨١٧,٦}{٤٠}} = \sqrt{٢٠,٤٤} \simeq ٤,٥٢$ درجة

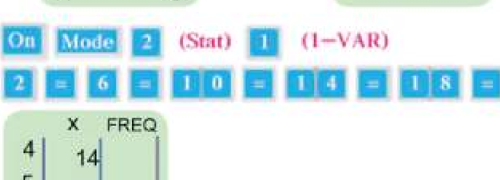
يمكن استخدام حاسبة الجيب [Fx-82ES, Fx-83ES, Fx-85ES, Fx-300ES, Fx-350ES] فى التحقق من صحة حساب الانحراف المعيارى.

أولاً: تهيئة الحاسبة للنظام الإحصائى والاستعداد لإدخال البيانات

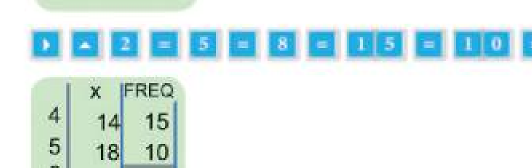


ثانيًا: حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى (مثال ٢)

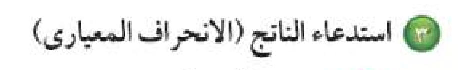
١ ندخل مراكز المجموعات ٢، ٦، ١٠، ١٤، ١٨



٢ الانتقال إلى بداية العمود الثانى (FREQ) وإدخال التكرار المناظر لكل مجموعة ٢، ٥، ٨، ١٥، ١٠



٣ استدعاء الناتج (الانحراف المعيارى)



فيكون σ ≃ ٤,٥٢١

٤ العودة للنظام الأصلى وإغلاق الحاسبة



لاحظ أن:

(١) يتأثر الانحراف المعيارى بانحرافات جميع القيم، وبالتالى تتأثر قيمته بالقيم المتطرفة.

(٢) الانحراف المعيارى له نفس وحدة قياس البيانات الأصلية، ولذلك يستخدم فى المقارنة بين تشتت المجموعات التى لها نفس وحدات القياس عند تساويها فى الوسط الحسابى، وتكون المجموعة الأكبر فى الانحراف المعيارى هى الأكثر تشتتًا.



الوحدة الرابعة: حساب المثلثات



علم حساب المثلثات هو أحد فروع الرياضيات والذى يتناول دراسة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه، وكان قدماء المصريين هم أول من عملوا بقواعد حساب المثلثات فى بناء الأهرامات، وبناء معابدهم، وفى دراسة الفلك، وفى حساب المسافات الجغرافية، كما قاس البابليون الزوايا بالدرجات والدقائق والثوانى، وقد قام البيرونى بعمل جداول لجيوب الزوايا ثم استنتج الطوسى أن جيوب الزوايا تتناسب مع الأضلاع المقابلة لها، ثم تعرف الغرب على ما صاغه علماء العرب والمسلمون من خلال ترجمة كتب الفلك العربية على يد العالم الألمانى يوهان مولر.

أبو الريحان البيرونى
عالم ولد فى خوارزم عام
٩٧٣ م وتوفى عام ١٠٤٨ م.

٤ - ١ النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة



سوف تتعلم

- كيفية إيجاد النسب المثلثية للزاوية الحادة فى المثلث القائم الزاوية.

مصطلحات أساسية

- قياس ستينى.
- جيب زاوية.
- جيب تمام زاوية .
- ظل زاوية.

فكر وناقش

فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، أكمل باستخدام أحد الرموز (> أو < أو =)



١ إذا كان ق(∠ جـ) > ق (∠ أ) فإن أب ..... ب جـ

٢ $\frac{أ ب}{أ جـ}$ ١

٣ $\frac{أ جـ}{ب جـ}$ ١

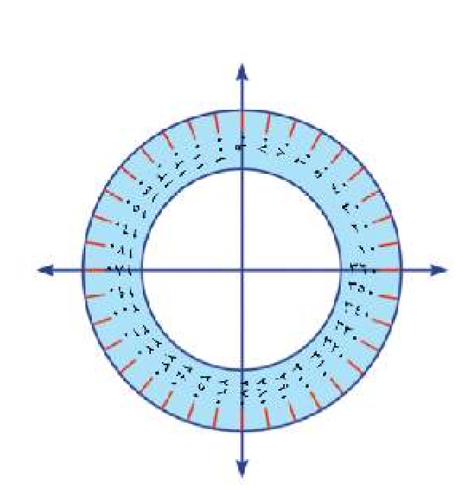


٤ $\frac{أ ب}{أ جـ} \div \frac{ب جـ}{أ جـ}$ ..... $\frac{أ ب}{ب جـ}$

٥ $\frac{أ ب}{أ جـ} + \frac{ب جـ}{أ جـ}$ ١

٦ $\frac{(أ ب)^٢}{(أ جـ)^٢} + \frac{(ب جـ)^٢}{(أ جـ)^٢}$ ١

القياس الستينى للزوايا



درسنا أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°، وإذا قسمت هذه الزوايا إلى أربعة أرباع متساوية فإن الربع الواحد يحتوى على ٩٠° (زاوية قائمة)؛ والدرجة هى وحدة القياس الستينى، كما توجد أجزاء من الدرجة على النحو التالى:

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية

٣٥ درجة ، ٢٤ دقيقة ، ٤٢ ثانية تكتب

كالآتى: ″٤٢ ′٢٤ °٣٥ ويمكن تحويل الدقائق والثوانى إلى أجزاء من الدرجة بإحدى هاتين الطريقتين :



أولاً: نحول ٢٤َ إلى درجات ٢٤َ = $\frac{٢٤}{٦٠}$ = ٠,٤°، ونحول ٤٢ً أولاً إلى دقائق ثم إلى درجات:

٤٢ً = $\frac{٤٢}{٦٠}$ = ٠,٧َ ، ٠,٧َ = $\frac{٠,٧}{٦٠}$ = ٠,٠١١٦٦٦٧°

فيكون الناتج ٤٢ً ٢٤َ ٣٥° = ٣٥ + ٠,٤ + ٠,٠١١٦٦٦٧ = ٣٥,٤١١٦٦٦٧°



ثانياً: باستخدام الآلة الحاسبة على النحو التالي:

٣٥ [° ' ''] ٢٤ [° ' ''] ٤٢ [° ' '']

والناتج هو: ٣٥,٤١١٦٦٦٧°

وبالمثل يمكن تحويل كسور الدرجة إلى دقائق وثوان.

فمثلاً: ٥٤,٣٦° يمكن تحويلها إلى درجات ودقائق وثوان باستخدام المفاتيح التالية:

٥٤,٣٦ [=] [SHIFT] [° ' '']

فيكون الناتج : ٣٦ً ٢١َ ٥٤°

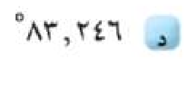


(١) اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات:

أ ١٦َ ٧٦° ب ٥٦ً ٣َ ٤٥° جـ ٨ً ٣٨َ ٨٥° د ٤٣ً ٢٦َ ٦٥°

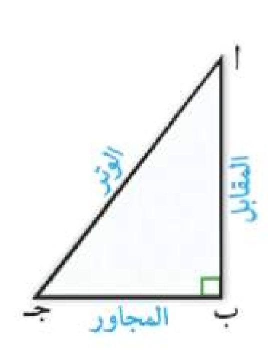
(٢) اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات والدقائق والثواني.

أ ٣٤,٦° ب ٧٨,٠٨° جـ ٥٦,١٨° د ٨٣,٢٤٦°



النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة:

الشكل المقابل:



يمثل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب حيث أ ، جـ زاويتان حادتان متتامتان؛ فالضلع المقابل للزاوية جـ يسمى بالمقابل ، والضلع المجاور للزاوية جـ يسمى بالمجاور ، والضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى بالوتر.

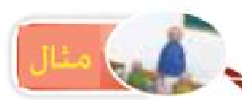
وسنتعرف الآن على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة؛ وهي:

(١) **جيب الزاوية:** ويرمز له بالعربية جا، وبالإنجليزية sin .

(٢) **جيب تمام الزاوية:** ويرمز له بالعربية جتا، وبالإنجليزية cos .

(٣) **ظل الزاوية:** ويرمز له بالعربية ظا، وبالإنجليزية tan .

جا جـ	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$
جتا جـ	=	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$
ظا جـ	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	=	$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$





(١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ ، أ ب = ١٣سم ، ب جـ = ١٢سم .



أ) أوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$

ب) أوجد كلاً من: جا أ ، جتا أ ، ظا أ ، جاب ، جتاب ، ظاب

جـ) أثبت أن : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

د) أوجد : ١ + ظا^{٢}أ



الحل

أ) $\because$ Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى جـ $\quad\therefore$ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} - (ب جـ)^{٢}

$\therefore$ (أ جـ)^{٢} = (١٣)^{٢} - (١٢)^{٢} = (١٣ + ١٢) (١٣ - ١٢) = ٢٥

$\therefore$ أ جـ = ٥سم

ب) جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، ظا أ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$

جـ) الطرف الأيمن = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٤٤ + ٢٥}{١٦٩} = ١$

د) ١ + ظا^{٢}أ = ١ + $(\frac{١٢}{٥})^{٢}$ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$



النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا



سوف تتعلم

- ☆ كيفية إيجاد النسب المثلثية للزوايا.
- ☆ (٣٠°، ٤٥°، ٦٠°)

مصطلحات أساسية

- ☆ نسبة مثلثية.
- ☆ زاوية خاصة.

① في الشكل المقابل:

ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه ٢ل ، رسم $\overline{اى} \perp \overline{ب جـ}$

أكمل :



① ق(∠ب) = ...°

② ق(∠ب ا ى) = ...°

③ ب ى = ... ، ا ى = ... (بدلالة ل)



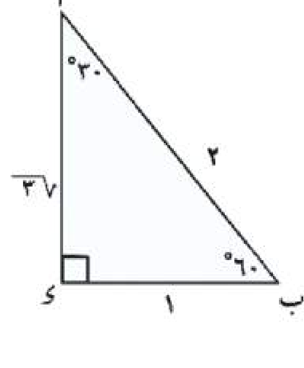
④ ب ى : ا ب : ا ى = ... : ...... : ......

نلاحظ مما سبق :

أن Δ ا ب ى ثلاثيني ستيني، وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

ب ى : ا ب : ا ى = ١ : ٢ : $\sqrt{3}$ وبالتالي يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا

٣٠° ، ٦٠° على النحو التالي :



جا ٣٠° = $\frac{ب ى}{ا ب}$ = $\frac{1}{2}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{ا ى}{ا ب}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ظا ٣٠° = $\frac{ب ى}{ا ى}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ،

جا ٦٠° = $\frac{ا ى}{ا ب}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا ٦٠° = $\frac{ب ى}{ا ب}$ = $\frac{1}{2}$ ، ظا ٦٠° = $\frac{ا ى}{ب ى}$ = $\sqrt{3}$

فكر وناقش

① فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين،وقائم الزاوية فى جـ،وطول كل من ساقيه ل .

أكمل :

① ق(∠ أ) = ... ، ق(∠ ب) = ...

② ∵ $(أب)^2 = (أجـ)^2 +$ .... ∴ $(أب)^2 = ل^2 +$ ....

∴ $(أب)^2 = 2ل^2$ ∴ أ ب = $\sqrt{2}$ ل

③ أ جـ : ب جـ : أ ب = ... : .... : ....

نلاحظ مما سبق :

أن Δ أ ب جـ فيه ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = 45° وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

أ جـ : ب جـ : أ ب = 1 : 1 : $\sqrt{2}$ وبالتالى يمكن إيجاد النسب المثلثية للزاوية 45° **كالآتى :**

جا 45° = $\frac{أجـ}{أب} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، جتا 45° = $\frac{بجـ}{أب} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ظا 45° = $\frac{أجـ}{بجـ} = 1$

ويمكن وضع النسب المثلثية السابقة فى جدول كالآتى :

ق الزاوية / النسبة	30°	60°	45°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1



ملاحظات :

١ **مما سبق نجد أن: (جيب)** أى زاوية يساوى **(جيب تمام)** الزاوية المتممة لهذه الزاوية ، والعكس صحيح .

فمثلاً: جا ٣٠° = جتا ٦٠° ، جتا ٣٠° = جا ٦٠° ، جا ٤٥° = جتا ٤٥°

٢ لأى زاوية أ يكون : ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$



أوجد قيمة كل من :

أ جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

ب $\frac{\text{جتا}^{٢}\ ٦٠° + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠° + \text{ظا}^{٢}\ ٤٥°}{\text{جا}\ ٦٠°\ \text{ظا}\ ٦٠° - \text{جا}\ ٣٠°}$

الحل

أ المقدار = جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤} = - \frac{١}{٢}$

ب المقدار = $\frac{\text{جتا}^{٢}\ ٦٠° + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠° + \text{ظا}^{٢}\ ٤٥°}{\text{جا}\ ٦٠°\ \text{ظا}\ ٦٠° - \text{جا}\ ٣٠°} = \frac{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} + (١)^{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} - \left(\frac{١}{٢}\right)} = \frac{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} + ١}{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}} = \frac{١ + ١}{١} = ٢$



برهن على صحة كل مما يأتى:

أ جا^{٢} ٣٠° = ٥ جتا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥°

ب ظا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٣٠° = (١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°) ÷ جتا^{٢} ٣٠°

شركة الأسراء للطباعة و التغليف





أوجد النسب المثلثية التالية :

جا ٤٣° ، جتا ٢٨َ ٥٣° ، ظا ٤٩ً ٣٧َ ٦٤°

مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية.

الحل

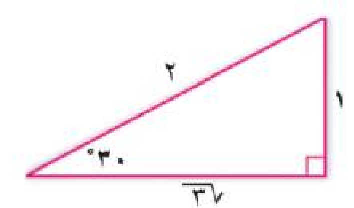
جا ٤٣° ≃ ٠,٦٨٢٠ — ابدأ ← sin ٤٣ =

جتا ٢٨َ ٥٣° ≃ ٠,٥٩٥٣ — ابدأ ← cos ٥٣ °''' ٢٨ °''' =

ظا ٤٩ً ٣٧َ ٦٤° ≃ ٢,١٠٨٩ — ابدأ ← tan ٦٤ °''' ٣٧ °''' ٤٩ °''' =

إيجاد الزاوية إذا عُلمت النسبة المثلثية لها :

سبق أن درست أنه إذا علمت زاوية فإنه يمكن إيجاد النسب المثلثية لها.



فمثلاً: إذا كانت الزاوية قياسها ٣٠° فإن جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$ وكذلك إذا كانت الزاوية قياسها ٣٣° فإن جا ٣٣° = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥

sin ٣٣° = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥

والآن نريد معرفة الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها.

فمثلاً: إذا كان جا س = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ والمطلوب معرفة قيمة س .

فإننا نستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالى:

ابدأ ← SHIFT sin ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ = °''' ٣٣°



أوجد ق(∠ هـ) فى كل مما يأتى :

جا هـ = ٠,٦ ، جتا هـ = ٠,٦٢١٧ ، ظا هـ = ١,٠٨٢٣



الحل

∵ جا هـ = ٠,٦ ∴ ق(∠هـ) = ٣٦° ٥٢َ ١٢ً SHIFT sin ٠,٦ =

∵ جتا هـ = ٠,٦٢١٧ ∴ ق(∠هـ) = ٥١° ٣٣َ ٣٥ً SHIFT cos ٠,٦٢١٧ =

∵ ظا هـ = ١,٠٨٢٣ ∴ ق(∠هـ) = ٤٧° ١٥َ ٤٨ً SHIFT tan ١,٠٨٢٣ =

الربط بالهندسة: مثال ٤ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢سم.

أوجد :

أولاً: ق(∠ب)

ثانياً: مساحة سطح المثلث لأقرب رقمين عشريين.



نرسم أ ى ⊥ ب جـ

∵ المثلث أ ب جـ متساوي الساقين.

∴ ى منتصف ب جـ ويكون ب ى = جـ ى = ٦سم

∵ جتا ب = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ = ٠,٧٥

وباستخدام الآلة الحاسبة:



∴ ق(∠ب) = ٤١° ٢٤َ ٣٥ً (وهو المطلوب أولاً)

لإيجاد مساحة سطح المثلث نوجد أ ى (من نظرية فيثاغورث)

∵ $(أى)^2 = (أب)^2 - (بى)^2$

∴ $(أى)^2$ = ٦٤ - ٣٦ = ٢٨ ∴ أ ى = ٢$\sqrt{٧}$

∵ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أ ى = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٢$\sqrt{٧}$

= ١٢$\sqrt{٧}$ سم² ≃ ٣١,٧٥سم² (وهو المطلوب ثانياً)

حل آخر للجزء الثانى:

∵ جا ب = $\frac{أ ء}{أ ب}$ ∴ جا ب = $\frac{أ ء}{٨}$

∴ أ ء = ٨ جا (٣٥ً ٢٤َ ٤١°) (١)

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أ ء وبالتعويض من (١) فى هذه العلاقة

∴ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨ جا (٣٥ً ٢٤َ ٤١°) ≃ ٣١,٧٥سم^{٢}.

ويمكن استخدام حاسبة الجيب على النحو التالى:

ابدأ → 1 ÷ 2 × 12 × 8 sin 41 °′″ 24 °′″ 35 °′″ =



أوجد قيمة س التى تحقق س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥ = جا^{٢} ٦٠°

الحل

∵ س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥° = جا^{٢} ٦٠°

∴ س × $\frac{١}{٢}$ × $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$

∴ س × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ ⟸ س = ٣



أوجد قيمة س التى تحقق ٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠° − ٢ظا ٤٥° حيث س زاوية حادة

الحل

∵ ٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠° − ٢ظا^{٢} ٤٥°

∴ ٢جا س = $(\sqrt{٣})^{٢}$ − ٢×١ = ٣−٢=١

∴ جا س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ٣٠°



الوحدة الخامسة: الهندسة التحليلية



يستخدم الرادار فى التعرف على بعد وارتفاع واتجاه و سرعة الأجسام المتحركه كالطائرات والسفن.

وهوائى الرادار يستقبل الموجات المرتدة، و على شاشة الرادار يمكن تحديد إحداثيات موقع الهدف (الطائرة - السفن- ...)



البعد بين نقطتين



سوف تتعلم

☆ كيفية إيجاد البعد بين نقطتين باستخدام قانون البعد.

مصطلحات أساسية

☆ مستوى إحداثى.
☆ زوج مرتب.
☆ بعد بين نقطتين.

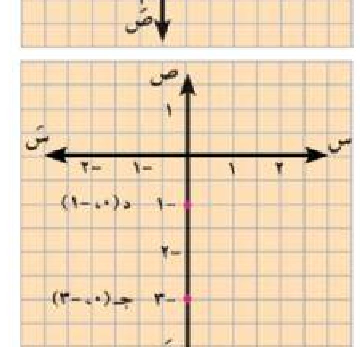
فكر وناقش

سبق أن قمت بتمثيل الزوج المرتب على المستوى الإحداثى .
والآن هل يمكنك إيجاد البعد بين أزواج النقاط الآتية :

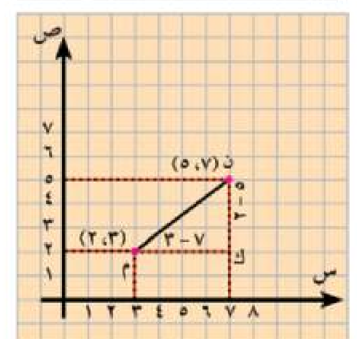
١ أ (٣، ٠)، ب (-١، ٠)
٢ جـ (٠، -٣)، د (٠، -١)
٣ م (٣، ٢)، ن (٧، ٥)

نلاحظ مما سبق أن :

١ النقطتين أ (٣، ٠)، ب (-١، ٠) تقعان على محور السينات، وبالتالى فإن :
أ ب = |-١ -٣ | = | -٤|
فيكون أ ب = ٤ وحدة طول.



٢ النقطتين جـ (٠، -٣)، د (٠، -١) تقعان على محور الصادات، وبالتالى فإن :
جـ د = |-٣ - (-١)|
= |-٣ +١| = | -٢|
فيكون جـ د = ٢ وحدة طول .



٣ النقطتين م (٣، ٢)، ن (٧، ٥) يمكن تمثيلهما بيانيًا كما فى الشكل المقابل.
ولإيجاد طول $\overline{\text{م ن}}$ نوجد :
م ك = |٧ -٣ | = ٤ وحدة طول،
ن ك = |٥ -٢| = ٣ وحدة طول .
△ م ك ن قائم الزاوية فى ك
∴ (ن م)^{٢} = (م ك)^{٢} + (ك ن)^{٢}
(نظرية فيثاغورث)

(ل م)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} (ل م)^{٢} = ٩ + ١٦
(ل م)^{٢} = ٢٥ ∴ (ل م) = ٥ وحدة طول

وبوجه عام :

إذا كانت : م ($س_١$ ، $ص_١$)، ن ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتين فى المستوى الإحداثى

فإن : ك م = |و ب - و أ|

$= |س_٢ - س_١|$

ك ن = |ن ب - ك ب| = $|ص_٢ - ص_١|$

∵ △ ن ك م قائم الزاوية فى ك **(نظرية فيثاغورث)**

∴ $(م ن)^٢ = (ك م)^٢ + (ك ن)^٢$

$= (س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢$

∴ $م ن = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

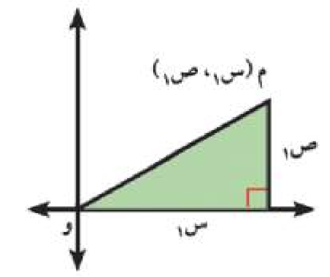
البعد بين النقطتين ($س_١$ ، $ص_١$)، ($س_٢$ ، $ص_٢$) = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

البعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

ملاحظة :

فى الشكل المقابل بعد النقطة م ($س_١$ ، $ص_١$) عن نقطة الأصل و (٠ ، ٠)

و م = $\sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢}$



مثال ١

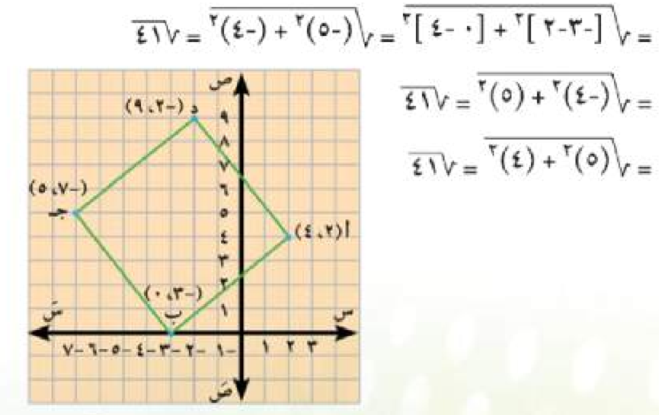
أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٢ ، ٤)، ب (-٣ ، ٠)، جـ(-٧ ، ٥) د(-٢ ، ٩) اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع.

الحل

أ ب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢} = \sqrt{[-٣-٢]^٢ + [٠ - ٤]^٢} = \sqrt{(-٥)^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٤١}$

ب جـ = $\sqrt{[-٧-(-٣)]^٢ + [٥ - ٠]^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (٥)^٢} = \sqrt{٤١}$

جـ د = $\sqrt{[-٢-(-٧)]^٢ + [٩ - ٥]^٢} = \sqrt{(٥)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{٤١}$



د أ = √([٢ − (٢)]٢ + [٤ − ٩]٢) = √((٤)٢ + (−٥)٢) = √٤١

∵ أ ب = ب جـ = جـ د = د أ = √٤١

∴ أ ب جـ د إما أن يكون مربعًا أو معينًا

لإثبات أن الشكل أ ب جـ د مربع نوجد طولى القطرين أ جـ ، ب د

أ جـ = √([−٧ − ٢]٢ + [٥ − ٤]٢) = √٨٢

ب د = √([−٢ − (−٣)]٢ + [٩ − ٠]٢) = √((−١)٢ + (٩)٢) = √٨٢

∵ أ جـ = ب د = √٨٢ وأضلاع الشكل أ ب جـ د متساوية فى الطول

∴ الشكل أ ب جـ د مربع

مثال ٢

أثبت أن المثلث الذى رؤوسه أ (١، ٤)، ب (-١، -٢)، جـ (٢، -٣) قائم الزاوية، وأوجد مساحة سطحه

الحل

(أ ب)٢ = (-١ - ١)٢ + (-٢ - ٤)٢ = ٤ + ٣٦ = ٤٠

(ب جـ)٢ = [٢ - (-١)]٢ + [-٣ - (-٢)]٢ = ٩ + ١ = ١٠

(أ جـ)٢ = (٢ - ١)٢ + (-٣ - ٤)٢ = ١ + ٤٩ = ٥٠

(أ ب)٢ + (ب جـ)٢ = ٤٠ + ١٠ = ٥٠ ، (أ جـ)٢ = ٥٠

∵ (أ جـ)٢ = (أ ب)٢ + (ب جـ)٢

∴ ق (∠ ب) = ٩٠° **(عكس نظرية فيثاغورث)**

∴ م (△ أ ب جـ) = ½ أ ب × ب جـ = ½ × √٤٠ × √١٠ = ½ × ٢√١٠ × √١٠ = ١٠ وحدة مربعة

مثال ٣

أثبت أن النقط أ (٣، -١)، ب (-٤، ٦)، جـ (٢، -٢)، تقع على دائرة مركزها النقطة م (-١، ٢)، ثم أوجد محيط الدائرة .

الحل

أ م = √((-١ - ٣)٢ + [٢ - (-١)]٢) = √((-٤)٢ + (٣)٢) = √٢٥ = ٥

ب م = √([-١ - (-٤)]٢ + [٢ - ٦]٢) = √((٣)٢ + (-٤)٢) = √٢٥ = ٥

جـ م = √((-١ - ٢)٢ + [٢ - (-٢)]٢) = √((-٣)٢ + (٤)٢) = √٢٥ = ٥

∵ أ م = ب م = جـ م = ٥

∴ أ ، ب، جـ تقع على دائرة مركزها م

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول



إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة.

مصطلحات أساسية

- طرفا قطعة مستقيمة.
- إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة .

فكر و ناقش

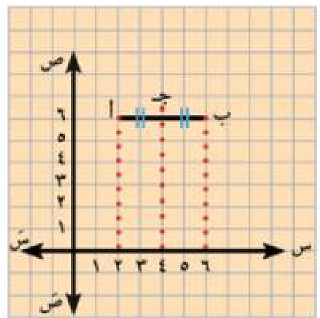
في مستوى إحداثي متعامد: أوجد إحداثيي النقطة جـ منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ إذا كان:

أولاً : أ (٢، ٦)، ب (٦، ٦)

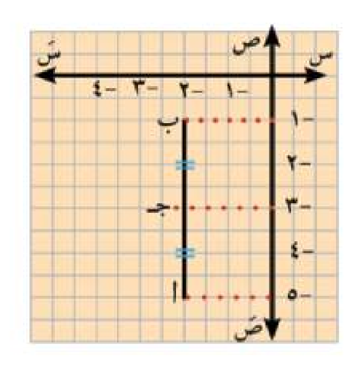
ثانيًا : أ (-٢، -٥)، ب (-٢، -١)

ثالثًا : أ (١، ٢)، ب (٥، ٦)

أولاً : القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان أ(٢، ٦)، ب (٦، ٦) توازي محور السينات ويكون إحداثيي نقطة منتصفها هي جـ (٤، ٦).



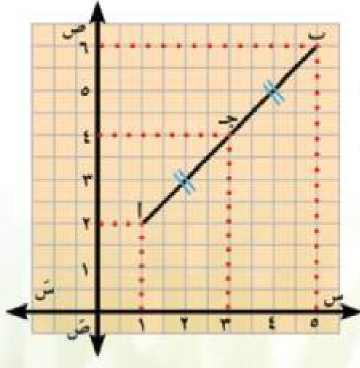
ثانيًا : القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان أ (-٢، -٥)، ب (-٢، -١) توازي محور الصادات، ويكون إحداثيي نقطة منتصفها هي جـ (-٢، -٣).



ثالثاً : في الشكل المقابل :

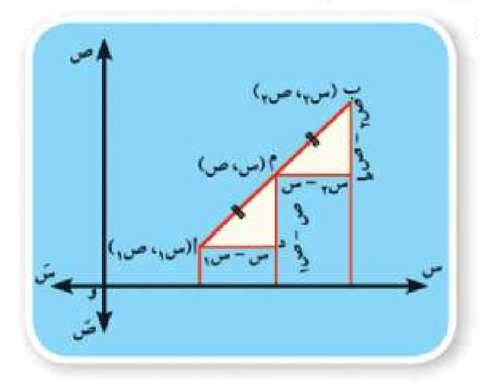
نفرض أن نقطة جـ منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان أ (١، ٢)، ب (٥، ٦)، ومن الرسم نجد أن إحداثيي جـ هو (٣، ٤) .

أي أن جـ $\left(\frac{١+٥}{٢}، \frac{٢+٦}{٢}\right)$ أي جـ (٣، ٤)



وعلى وجه العموم يمكن استنتاج قانون إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة كالآتى :

إذا كانت : ا $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$ ، م (س ، ص) حيث م منتصف $\overline{اب}$.



ومن تطابق المثلثين △ م د ا ، △ ب هـ م

نجد أن : ا د = م هـ

$\therefore$ $س - س_1 = س_2 - س$

$\therefore$ $٢س = س_1 + س_2$ $\therefore$ $س = \frac{س_1 + س_2}{٢}$

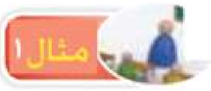
وبالمثل : م د = ب هـ $\therefore$ $ص - ص_1 = ص_2 - ص$

$\therefore$ $٢ص = ص_1 + ص_2$ $\therefore$ $ص = \frac{ص_1 + ص_2}{٢}$

م $\left(\frac{س_1 + س_2}{٢} ، \frac{ص_1 + ص_2}{٢}\right)$

مثال : إذا كانت جـ منتصف $\overline{اب}$ وكان ا (٣ ، - ٧) ، ب (- ٥ ، - ٣)

فإن إحداثيي منتصف $\overline{اب}$ هى $\left(\frac{٣ - ٥}{٢} ، \frac{- ٧ - ٣}{٢}\right)$ أى (- ١ ، - ٥)



مثال ١

إذا كانت جـ (٦ ، -٤) هى منتصف $\overline{اب}$ حيث ا (٥ ، -٣) فأوجد إحداثيى نقطة ب .

الحل

نفرض أن ب $(س_2 ، ص_2)$ ، ا (٥ ، -٣) ، منتصف $\overline{اب}$ هي النقطة جـ (٦ ، -٤)

$\therefore$ $س = \frac{س_1 + س_2}{٢}$ ، $ص = \frac{ص_1 + ص_2}{٢}$

$\therefore$ $٦ = \frac{٥ + س_2}{٢}$ $\therefore$ $٥ + س_2 = ١٢$ $\therefore$ $س_2 = ١٢ - ٥ = ٧$

$-٤ = \frac{-٣ + ص_2}{٢}$ $\therefore$ $-٣ + ص_2 = -٨$

$ص_2 = -٨ + ٣$ $ص_2 = -٥$

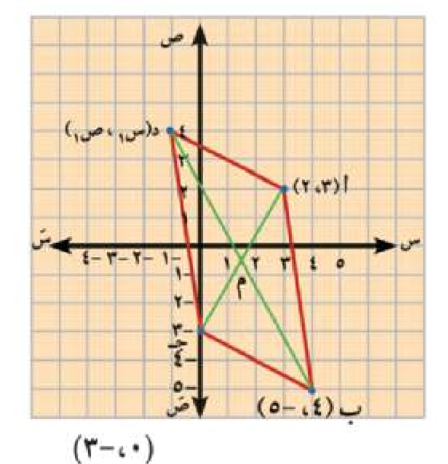
$\therefore$ ب (٧ ، -٥)



مثال ٢

أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣، ٢)، ب (٤، -٥)، جـ (٠، - ٣) - أوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه، ثم أوجد إحداثيى نقطة د .

الحل



الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع، م نقطة تقاطع قطريه،

نفرض د ($س_١$ ، $ص_١$)

∵ م منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ م $\left(\frac{٣ + ٠}{٢} ، \frac{٢ - ٣}{٢}\right)$

∴ م $\left(\frac{٣}{٢} ، - \frac{١}{٢}\right)$

، م منتصف $\overline{ب د}$ ∴ م $\left(\frac{٤ + س_١}{٢} ، \frac{-٥ + ص_١}{٢}\right)$

∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{٤ + س_١}{٢}$ ∴ ٣ = ٤ + $س_١$

∴ $س_١$ = - ١

، - $\frac{١}{٢} = \frac{-٥ + ص_١}{٢}$ ∴ -١ = - ٥ + $ص_١$

∴ $ص_١$ = ٤

∴ إحداثى د (- ١ ، ٤)



ميل الخط المستقيم



سوف تتعلم

- العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين.
- العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين.

مصطلحات أساسية

- قياس موجب للزاوية.
- قياس سالب للزاوية.
- ميل خط مستقيم.
- مستقيمان متوازيان.
- مستقيمان متعامدان.

سبق أن علمت أن ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(س_١، ص_١)$، $(س_٢، ص_٢)$ يساوي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

فكر وناقش

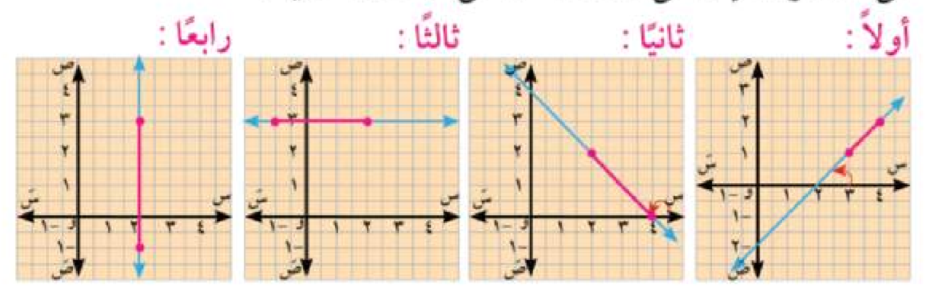
أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من الأزواج المرتبة التالية :

أولاً : (٣، ١)، (٤، ٢) **ثانيًا** : (٤، ٠)، (٢، ٢)

ثالثًا : (-١، ٣)، (٢، ٣) **رابعًا** : (٢، -١)، (٢، ٣)

ماذا تلاحظ ؟

مما سبق يمكن رسم المستقيمات المارة بأزواج النقط السابقة فى المستوى الإحداثى المتعامد كما فى الأشكال الآتية :



القياس الموجب والقياس السالب للزاوية:



تكون الزاوية موجبة إذا كانت مأخوذة فى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كانت مأخوذة فى نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.

فمن الأشكال السابقة نستنتج أن:

رقم الشكل	الميل $\left(\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}\right)$، $س_٢ > س_١$	نوع الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	ميل الخط المستقيم
أولاً	$م = \frac{٢ - ١}{٤ - ٣} = ١$	حادة	أكبر من الصفر
ثانيًا	$م = \frac{٢ - ٠}{٢ - ٤} = -١$	منفرجة	أقل من الصفر
ثالثًا	$م = \frac{٣ - ٣}{٢ + ١} =$ صفر	صفرية	يساوى صفرًا
رابعًا	$م = \frac{٣ + ١}{٢ - ٢}$ (غير معرف)	قائمة	غير معرف

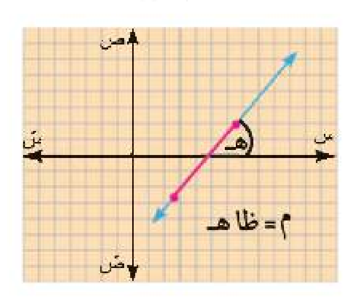


ونصل إلى تعريف ميل الخط المستقيم

هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الأتجاه الموجب لمحور السينات؛

أى أن: ميل الخط المستقيم = ظا هـ

حيث هـ الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.





١ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٨ ً ١٢ ً ٥٦° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم = ١,٤٨٦٥ .

الحل

١ ∵ م = ظا هـ ∴ م = ظا٤٨ ً ١٢ َ ٥٦° = ١,٤٩٤٥٣٤٤٠٥

ابدأ



٢ ∵ م = ظا هـ ∴ ظا هـ = ١,٤٨٦٥ ∴ ق (∠ هـ) = ١٣ ً ٤ َ ٥٦°

ابدأ

SHIFT tan 1.4865 = °'''



١ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها :

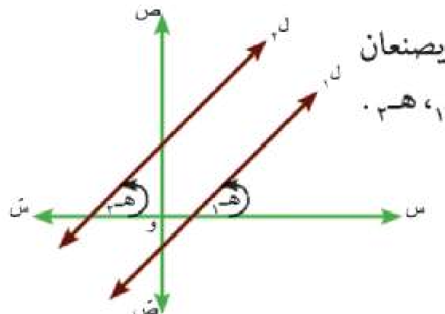
أ ٣٠° ب ٤٥° جـ ٦٠°

٢ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم الذى ميله (م) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى الحالات الآتية :

أ م = ٠,٣٦٧٣ ب م = ١,٠٢٤٦ جـ م = ٣,١٦٤٨

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

فكر وناقش



الشكل المقابل : يمثل مستقيمين متوازيين $ل_١$، $ل_٢$ ميلاهما $م_١$، $م_٢$، يصنعان زاويتين موجبتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسهما $هـ_١$، $هـ_٢$.

أكمل ما يأتي :

١) ق ($\angle$ $هـ_١$) = ق ($\angle$ $هـ_٢$) لأنهما ....

٢) ظا $هـ_١$ .... ظا$هـ_٢$

٣) $م_١$ .... $م_٢$

نستنتج مما سبق أن :

إذا كان $ل_١$ // $ل_٢$ **فإن** $م_١ = م_٢$

أى أنه: إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين، وعكس ذلك صحيح.

فإذا كان $م_١ = م_٢$ فإن $ل_١$ // $ل_٢$

أى أن: إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين.

أمثلة

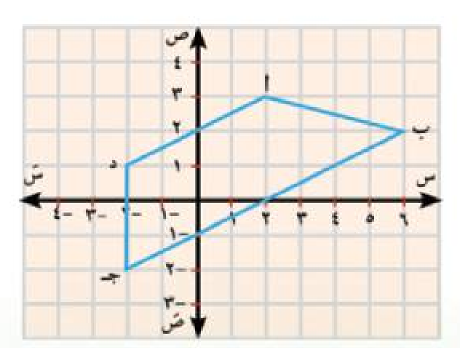
١) أثبت أن المستقيم الذى يمر بالنقطتين (-٣، -٢)، (٤، ٥) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥ °.

الحل

ميل المستقيم الأول ($م_١$) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - (-٢)}{٤ - (-٣)} = \frac{٧}{٧} = ١$

ميل المستقيم الثانى ($م_٢$) = ظا ٤٥° = ١ $\because$ $م_١ = م_٢$ $\therefore$ المستقيمان متوازيان .

٢) مثِّل بيانيًّا النقط أ(٢، ٣)، ب (٦، ٢) جـ (-٢، -٢)، د (-٢، ١)، على المستوى الإحداثى، ثم أثبت أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف .



الحل

من الرسم نجد أن : $\overline{أد}$ // $\overline{ب جـ}$

ولإثبات ذلك تحليليًّا نوجد ميل كل من $\overline{أد}$ ، $\overline{ب جـ}$.



ميل $\overline{أد}$ (وليكن $م_1$)

$\because م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ $\therefore م_1 = \frac{٣ - ١}{٢ + ٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

وميل $\overline{ب جـ}$ (وليكن $م_2$)

$م_2 = \frac{٢ + ٢}{٦ + ٢} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ $\because م_1 = م_2$ ..... $\therefore \overline{أد} // \overline{ب جـ}$

$\therefore$ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف ما لم تكن النقط أ، ب، جـ، د على استقامة واحدة .... (١)

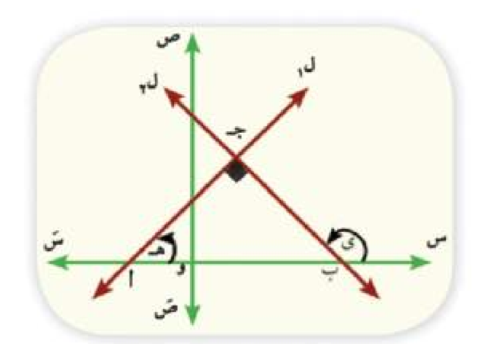
$\because$ ميل $\overline{أب} = \frac{٣ - ٢}{٢ - ٦} = \frac{١}{-٤}$، ميل $\overline{جـ د} = \frac{٢ + ١}{-٢ + ٢}$ .... (غير معرف)

$\therefore$ المستقيمان غير متوازيين............ (٢)

من (١)، (٢) $\therefore$ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف .

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

فكر وناقش



الشكل المقابل : يمثل المستقيمين $ل_1$، $ل_2$ الذى ميلاهما $م_1$، $م_2$ حيث $ل_1 \perp ل_2$.

أوجد العلاقة بين ق ($\angle$ هـ) ، ق ($\angle$ ى)

ثم أكمل الجدول الآتى باستخدام حاسبة الجيب:



قيم هـ	٢٠°	٤٠°	.....	.....	....
قيم ى	......	.....	١٤٠°	١٥٠°	.....
ظا هـ × ظا ى	.....	.....	.....	.....	.....

من الجدول السابق نجد أن :

ظا هـ × ظا ى = -١ أى أن : $م_1 م_2 = -١$

$ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمان ميلاهما $م_1$ ، $م_2$ حيث $م_1$ ، $م_2 \in ح^*$

إذا كان $ل_1 \perp ل_2$ **فإن** $م_1 \times م_2 = -١$

أى أن: حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = -١

وعكس ذلك صحيح؛ **فإذا كان** $م_1 \times م_2 = -١$ **فإن** $ل_1 \perp ل_2$

أى أن إذا كان حاصل ضرب ميلى مستقيمين = -١ فإن المستقيمين يكونان متعامدين.



① أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $(٤، ٣\sqrt{٣})$، $(٥، ٢\sqrt{٣})$ عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠°.

الحل

نفرض أن ميل المستقيم الأول $م_١$ وميل المستقيم الثانى $م_٢$.

∵ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ∴ $م_١ = \frac{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٤ - ٥} = -\sqrt{٣}$

∵ م = ظاهـ ∴ $م_٢ =$ ظا ٣٠° $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $م_١ \times م_٢ = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -١$ ∴ المستقيمان متعامدان.

② إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ص (٤، ٢)، س (٣، ٥)، ع (-٥، أ) قائم الزاوية فى ص فأوجد قيمة أ.

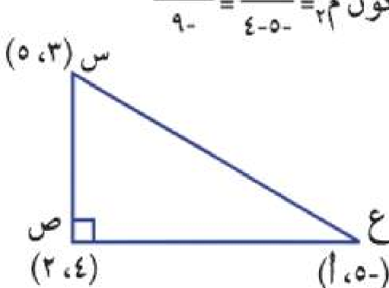
الحل

نوجد ميل $\overleftrightarrow{س ص}$ فيكون $م_١ = \frac{٥ - ٢}{٣ - ٤} = \frac{٣}{-١} = -٣$ ، نوجد ميل $\overleftrightarrow{ص ع}$ فيكون $م_٢ = \frac{أ - ٢}{-٥ - ٤} = \frac{أ - ٢}{-٩}$

∵ △ س ص ع قائم الزاوية فى ص ∴ $م_١ \times م_٢ = -١$

∴ $-٣ \times \frac{أ - ٢}{-٩} = -١$ ∴ $\frac{(أ - ٢)}{٣} = -١$

∴ أ - ٢ = -٣ ∴ أ = ٢ - ٣ ∴ أ = -١





معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات



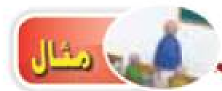
سوف تتعلم

- كيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من محور الصادات.

مصطلحات أساسية

- معادلة خط مستقيم.
- ميل خط مستقيم.
- جزء مقطوع من محور الصادات.

سبق أن درست العلاقة الخطية بين المتغيرين س، ص وهى :
أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ، ب (كلاهما معًا) ≠ ٠
وتمثيلها بيانيًّا بخط مستقيم .



مثِّل العلاقة : س -٢ص + ٤ = ٠ بيانيًّا .
ومن الشكل البيانى احسب :

أ ميل الخط المستقيم .

ب طول الجزء الرأسى المحصور بين نقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .

لسهولة الرسم يفضل إيجاد نقط تقاطع المحورين كالآتى :

بوضع ص = ٠ ∴ س + ٤ = ٠
∴ س = -٤ (-٤ ، ٠) يحقق العلاقة .
بوضع س = ٠ ∴ -٢ص + ٤ = ٠
∴ ٢ص = ٤ (٠، ٢) يحقق العلاقة

من الرسم نجد أن : ميل الخط المستقيم (م) > ٠ ..... (لماذا؟)
فيكون م = $\frac{......}{......}$ = $\frac{......}{......}$

يسمى البعد المحصور بين النقطتين و، ب بالجزء المقطوع من محور الصادات ويرمز له بالرمز (جـ) و طوله يساوى ٢ وحدة طول .
ويمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة :ص = م س + جـ
فيكون ٢ص = س + ٤ وبقسمة الطرفين على ٢ ∴ ص = $\frac{1}{2}$ س + ٢
ونلاحظ من هذه الصورة أن : ميل الخط المستقيم (م) هو معامل س ويساوى $\frac{1}{2}$، وأن طول الجزء المقطوع من محور الصادات جـ = ٢ وهى نفس النتائج التى حصلنا عليها من الرسم السابق .

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) على الصورة:

ص = م س + جـ   حيث م، جـ ∈ ح

لاحظ أن: يمكن وضع معادلة الخط المستقيم أ س + ب ص + جـ = صفر، ب ≠ ٠

على الصورة : ص = م س + جـ كالآتى :

أ س + ب ص + جـ = صفر   فيكون ب ص = - أ س - جـ

∴ ص = - $\frac{أ}{ب}$ س - $\frac{جـ}{ب}$

وهى على الصورة : ص = م س + جـ

حيث م = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

، جـ هو طول الجزء المقطوع من محور الصادات .

أمثلة

١ أوجد ميل الخط المستقيم ٣ س + ٤ ص - ٥ = صفر بطريقتين ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات .

الحل

∵ معادلة الخط المستقيم على الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠، ب ≠ ٠

∴ ميل المستقيم = $\frac{-أ}{ب}$ ∴ **ميل المستقيم** = $\frac{-٣}{٤}$

أو يمكن وضع معادلة الخط المستقيم على الصورة ص = م س + جـ

∴ ٤ ص = -٣س +٥

ص = $\frac{-٣}{٤}$س + $\frac{٥}{٤}$ ∴ **ميل المستقيم** = $\frac{-٣}{٤}$

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٥}{٤}$

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٢) وعمودى على الخط المستقيم المار بالنقطتين أ (٢، -٣)، ب (٥، -٤) .

الحل

∵ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ، ب = $\frac{-٤-(-٣)}{٥ - ٢}$ = $\frac{-٤ + ٣}{٥ - ٢}$ = $\frac{-١}{٣}$ فيكون ميل المستقيم العمودى عليه = ٣

∴ معادلة المستقيم تكون على الصورة : ص = ٣ س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١، ٢) فهى تحقق معادلته .

∴ ٢ = ٣ × ١ + جـ   ∴ جـ = ٢ - ٣ = -١

∴ معادلة المستقيم تكون على الصورة : ص = ٣س -١



٣ إذا كانت أ (-٣، ٤)، ب (٥، -١)، جـ (٣، ٥) فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالرأس أ وينصف $\overline{ب جـ}$.

الحل

نقطة منتصف $\overline{ب جـ}$ = $(\frac{٣ + ٥}{٢} ، \frac{٥ - ١}{٢})$ = $(\frac{٨}{٢} ، \frac{٤}{٢})$ = (٤، ٢)

∴ ميل الخط المستقيم المطلوب = $\frac{٢ - ٤}{٤ + ٣}$ = $\frac{-٢}{٧}$

∵ ص = م س + جـ ∴ ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة أ (-٣، ٤) فهى تحقق معادلته

∴ ٤ = $\frac{-٢}{٧}$ × -٣ + جـ ∴ ٤ = $\frac{٦}{٧}$ + جـ ∴ جـ = $\frac{٢٢}{٧}$

∴ معادلة الخط المستقيم تكون على الصورة : ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + $\frac{٢٢}{٧}$ وبضرب طرفى المعادلة فى ٧

∴ ٧ص = - ٢س + ٢٢ أى المعادلة هى : ٢س + ٧ص − ٢٢ = ٠





جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفني
الإدارة المركزية لشئون الكتب



الرياضيات

الصف الثالث الإعدادى **كتاب الطالب** الفصل الدراسى الثانى

تأليف

الأستاذ/ **عمر فؤاد جاب الله**

الأستاذ الدكتور/ **عفاف أبو الفتوح صالح** الدكتور/ **عصام وصفى روفائيل**

الأستاذ/ **سيرافيم إلياس إسكندر** الأستاذ/ **كمال يونس كبشة**

مراجعة

الأستاذ / **فتحي أحمد شحاتة** الأستاذ / **سمير محمد سعداوي**

مراجعة علمية
أ / جمال الشاهد
مستشار الرياضيات

تحرير واخراج مركز تطوير المناهج

طبعة ٢٠٢٢ - ٢٠٢٣

المحتويات

الجبر

الوحدة الأولى : المعادلات

الوحدة الثانية : الدوال الكسرية والعمليات عليها

الاحتمال

الوحدة الثالثة : الاحتمال

الهندسة

الوحدة الرابعة :

الوحدة الخامسة : الزوايا والأقواس فى الدائرة

الرموز الرياضية المستخدمة

الرمز	يُقرَأ	الرمز	يُقرَأ
ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	$\perp$	عمودى على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازى
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{\text{أ ب}}$	القطعة المستقيمة أ ب
نَ	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	الشعاع أ ب
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$	المستقيم أ ب
$\sqrt{\text{أ}}$	الجذر التربيعي للعدد أ	ق ($\angle$ أ)	قياس زاوية أ
$\sqrt[3]{\text{أ}}$	الجذر التكعيبي للعدد أ	ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)	قياس القوس أ ب
[أ ، ب]	فترة مغلقة	$\sim$	تشابه
]أ ، ب[	فترة مفتوحة	$<$	أكبر من
[أ ، ب[	فترة نصف مفتوحة	$\leqslant$	أكبر من أو تساوى
]أ ، ب]	فترة نصف مفتوحة	$>$	أقل من
[أ ، ∞[	فترة غير محدودة	$\geqslant$	أقل من أو تساوى
$\equiv$	تطابق	ل(أ)	احتمال وقوع الحدث أ
ن (أ)	عدد عناصر الحدث أ	$\overline{\text{س}}$	الوسط الحسابى
ف	فضاء العينة	σ	الانحراف العيارى
		مج أو Σ	المجموع



المعادلات

الدوال الكسرية والعمليات عليها

قذف أحد اللاعبين كرة فأخذت المسار الموضح بالشكل.

هذا **الشكل** يمثل إحدى الدوال التي ستدرسها وتسمى بالدالة التربيعية.

الوحدة الأولى

المعادلات



حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين جبرياً وبيانياً



سوف تتعلم

- كيفية حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين.

مصطلحات أساسية

- معادلة من الدرجة الأولى.
- حل بيانى.
- حل جبرى.
- مجموعة التعويض.
- مجموعة الحل.

فكر وناقش

مستطيل محيطه ٣٠سم ما هى القيم الممكنة لطوله وعرضه

إذا كان طول المستطيل = س سم،

عرض المستطيل = ص سم

فإن : الطول + العرض = $\frac{١}{٢}$ المحيط

∴ س + ص = ١٥

(ص سم ، س سم)

- تسمى هذه المعادلة معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين .
- حل هذه المعادلة يعنى إيجاد زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يحقق المعادلة.

هل يمكن أن يكون (–٥، ٢٠) حلا للمعادلة السابقة.

نترك لك عزيزى الطالب الإجابة على هذا السؤال بعد عرض الآتى:

- يمكن حل المعادلة بوضعها على إحدى الصورتين.

(١) ص = ١٥ - س أو (٢) س = ١٥ - ص

وبإعطاء أحد المتغيرين أى قيمة يمكن حساب قيمة المتغير الآخر.

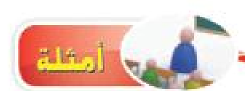
فإذا كان س ∋ ح فإن مجموعة التعويض هى ح × ح ويكون لمعادلة الدرجة الأولى عدد غير منته من الحلول التى كل منها على صورة زوج مرتب (س، ص) حيث مسقطه الأول س ومسقطه الثانى ص.

عند س = ٨ ∴ ص = ١٥ - ٨ = ٧ ∴ (٨، ٧) حل للمعادلة

عند س = ٩,٥ ∴ ص = ١٥ - ٩,٥ = ٥,٥ ∴ (٩,٥، ٥,٥) حل للمعادلة

عند س = ٤ $\sqrt{٧}$ ∴ ص = ١٥ - ٤ $\sqrt{٧}$ ∴ (٤ $\sqrt{٧}$، ١٥ - ٤ $\sqrt{٧}$) حل للمعادلة

أولا : حل معادلات من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا :



(١) أوجد مجموعة حل المعادلة ٢س - ص = ١



الحل

نكتب المعادلة فى الصورة ص = ٢س - ١

بوضع س = ٠ ∴ ص = -١ ∴ (٠، -١) حل للمعادلة

بوضع س = ٢ ∴ ص = ٣ ∴ (٢، ٣) حل للمعادلة

وبرسم المستقيم ل المار بالنقطتين الممثلتين للزوجين المرتبين (٠، -١)، (٢، ٣)

نجد أن كل نقطة ∈ ل تمثل حلاً للمعادلة

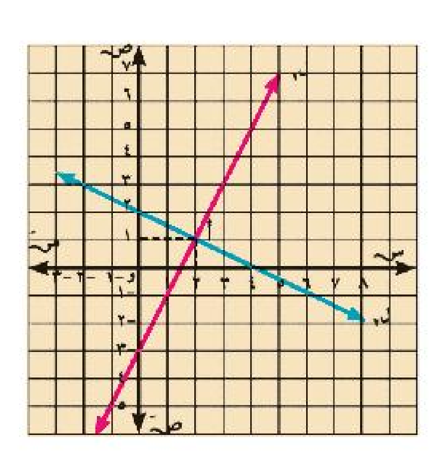
أى أن للمعادلة ٢س - ص = ١ عدد غير منته من الحلول.

اذكر أربعة حلول أخرى لهذه المعادلة.

٢ أوجد مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين بيانيًا :

ل١ : ص = ٢س - ٣ ، ل٢ : س + ٢ص = ٤

الحل



فى المعادلة ص = ٢س - ٣

بوضع س = ٠ ∴ ص = -٣ ∴ (٠، -٣) حل للمعادلة

بوضع س = ٤ ∴ ص = ٥ ∴ (٤، ٥) حل للمعادلة

فيكون ل١ فى الشكل المقابل يمثل مجموعة الحل للمعادلة **(١)**

نضع المعادلة س + ٢ص = ٤ على الصورة س = ٤ - ٢ص

بوضع ص = ٠ ∴ س = ٤ ∴ (٤، ٠) حل للمعادلة

وبوضع ص = ١ ∴ س = ٢ ∴ (٢، ١) حل للمعادلة

فيكون ل٢ فى الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المعادلة **(٢)**

فى الشكل ل١ ، ل٢ يتقاطعان فى النقطة أ (٢، ١)

∴ مجموعة حل المعادلتين هى {(٢، ١)}

تدرب فى كراسة الرسم البياني:

أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية بيانيًا:

١ ٢س + ص = ٠ ، س + ٢ص = ٣ ٢ ص = ٣س - ١ ، س - ص + ١ = ٠



مثال ٣

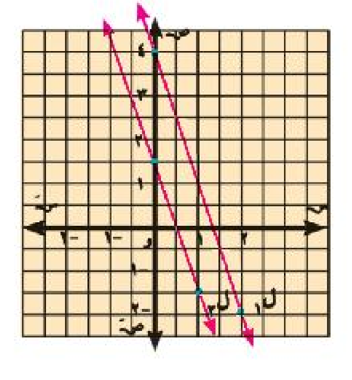
أوجد بيانيا مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

أولا: ٣س + ص = ٤ **(١)** ، ٢ص + ٦س = ٣ **(٢)**

ثانيا: ٣س + ٢ص = ٦ **(١)** ، ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ س **(٢)**

الحل

أولا: بوضع المعادلة **(١)** على الصورة ص = ٤ - ٣س



بوضع س = ٠ ∴ ص = ٤ فيكون (٠ ، ٤) حلا للمعادلة

بوضع س = ٢ ∴ ص = -٢ فيكون (٢، -٢) حلا للمعادلة

ويكون $ل_١$ يمثل مجموعة حل المعادلة **(١)**

بوضع المعادلة **(٢)** على الصورة ص = $\frac{٣ - ٦س}{٢}$

بوضع س = ٠ ∴ ص = $\frac{٣}{٢}$ فيكون (٠، $\frac{٣}{٢}$) حلا للمعادلة

بوضع س = ١ ∴ ص = $\frac{-٣}{٢}$ فيكون (١، $\frac{-٣}{٢}$) حلا للمعادلة

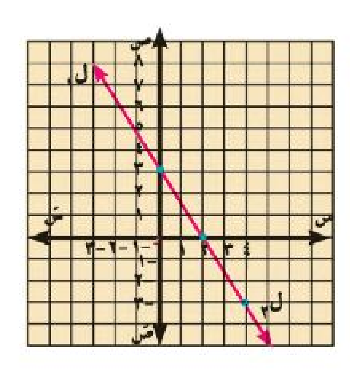
ويكون $ل_٢$ يمثل مجموعة الحل للمعادلة **(٢)**

∵ $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$ ∴ لا يوجد حل للمعادلتين معا.

أى أنه لا يوجد حل للمعادلتين **(١)**، **(٢)** إذا كان $ل_١ // ل_٢$

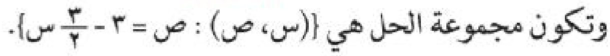
من الهندسة التحليلية: ميل $ل_١$ = $\frac{-٣}{١}$ = -٣ ، ميل $ل_٢$ = $\frac{-٦}{٢}$ = -٣ ∴ $ل_١ // ل_٢$

ثانيا : بوضع المعادلة **(٢)** على الصورة ٢ص = ٦ - ٣س



أي ٣س + ٢ص = ٦ وهي نفس المعادلة **(١)**

والشكل البياني الموضح يبين التمثيل البياني للمعادلتين بمستقيمين منطبقين ونقول إن للمعادلتين **(١)**، **(٢)** عدداً غير منته من الحلول وتكون مجموعة الحل هي {(س، ص) : ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ س}.



تدرب فى كراسة الرسم البياني:

أوجد بيانيا مجموعة الحل لكل زوج فى المعادلات الآتية :

(١) ٣س + ص = ٥ ، ص + ٣س = ٨ (٢) ٢س + ص = ٤ ، ٨ - ٢ص = ٤س

ثانيا : حل معادلات الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا :

يمكن حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين آنيًا بالتخلص من أحد المتغيرين، فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد، وبحلها نحصل على قيمة هذا المتغير، ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الذى سبق التخلص منه .

مثال ٤

أوجد مجموعة حل المعادلتين:

٢س - ص = ٣ (١) ، س + ٢ص = ٤ (٢)

الحل (طريقة التعويض)

من المعادلة (١) ص = ٢س - ٣

بالتعويض فى المعادلة (٢) عن ص ∴ س + ٢ (٢س - ٣) = ٤

فيكون : س + ٤س - ٦ = ٤ ∴ ٥س = ١٠ ∴ س = ٢

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ ص = ٢ × ٢ - ٣ ∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل المشتركة للمعادلتين = {(٢، ١)}

حل اخر (طريقة الحذف)

ويتم حذف أحد المتغيرين من المعادلتين (بالجمع، أو الطرح) للحصول على معادلة ثالثة فى متغير واحد وبحل المعادلة الناتجة نوجد قيمة هذا المتغير.

٢س - ص = ٣ (١) ، س + ٢ص = ٤ (٢)

بضرب طرفى المعادلة(١) × ٢ ∴ ٤س - ٢ص = ٦ (٣)

من (٢)، (٣) بالجمع ∴ ٥س = ١٠ ∴ س = ٢

بالتعويض فى (١) ∴ ٢ × ٢ - ص = ٣ ∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل المشتركة للمعادلتين = {(٢، ١)}.

تدرب

أجب عن الأسئلة الآتية في كراسة الفصل:

١ أوجد جبريا مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

أ ٣س + ٤ص = ٢٤ ، س - ٢ص + ٢ = ٠

ب ٣س + ٢ص = ٤ ، س - ٣ص =٥ ٠

٢ ما عدد حلول كل زوج فى المعادلات الآتية :

أ ٧س + ٤ص = ٦ ، ٥س - ٢ص = ١٤

ب ٩س + ٦ص = ٢٤ ، ٣س + ٢ص = ٨

جـ ٣س + ٤ص = -٤ ، ٥س - ٢ص = ١٥



مثال ٥

أوجد قيمتى أ، ب علما بأن (٣، -١) حل للمعادلتين.

أ س + ب ص - ٥ = ٠ ، ٣ أ س + ب ص = ١٧

الحل

∵ (٣، -١) حل للمعادلتين

∴ (٣، -١) حل للمعادلة أ س + ب ص - ٥ = ٠

∴ ٣ أ - ب - ٥ = ٠ **أى أن :** ٣ أ - ب = ٥ **(١)**

، (٣، -١) حل للمعادلة ٣ أ س + ب ص = ١٧

∴ ٩ أ - ب = ١٧ **(٢)**

بطرح طرفى المعادلة **(١)** من طرفى المعادلة **(٢)** ينتج أن :

٦ أ = ١٢ ∴ أ = ٢

بالتعويض فى المعادلة **(١)**

٣ × ٢ - ب = ٥ ∴ ب = ١



مثال ٦

عدد مكون من رقمين مجموعهما ١١، و إذا عكس **(بُدِّل)** وضع الرقمين، فإن العدد الناتج يزيد على العدد الأصلي بمقدار ٢٧ ما هو العدد الأصلي؟

الحل

نفرض أن رقم الآحاد = س، رقم العشرات = ص

∴ س + ص = ١١ .... **(١)**

	رقم الآحاد	رقم العشرات	قيمة العدد
العدد الأصلي	س	ص	س + ١٠ ص
العدد الناتج بعد تبديل الرقمين	ص	س	ص + ١٠ س

العدد الناتج من تبديل وضع رقمية - العدد الأصلي = ٢٧

∴ (ص + ١٠ س) - (س + ١٠ ص) = ٢٧ ∴ ص + ١٠ س - س - ١٠ ص = ٢٧

∴ ٩ س − ٩ ص = ٢٧ **وبالقسمة على ٩** ∴ س − ص = ٣ .... **(٢)**

بجمع المعادلتين (١)، (٢)

∴ ٢س = ١٤ ∴ س = ٧ وبالتعويض في المعادلة....**(١)**

∴ ٧ + ص = ١١ ∴ ص = ٤ ∴ العدد هو ٤٧



حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيا وجبريا

سوف تتعلم

☆ كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيا وجبريا.

مصطلحات أساسية

☆ حل بيانى.
☆ حل جبرى.
☆ مجموعة الحل.

لاحظ المثال التالي:

سبق أن مثلنا بيانيا الدالة التربيعية د حيث :

د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ، ب، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

والمعادلة المناظرة لها هى د(س) = ٠ أى أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

وقد سبق لك حل هذه المعادلة بالتحليل.

ولحل المعادلة : س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠

نحلل الطرف الأيمن للمعادلة فتأخذ الصورة :

(س - ٣) (س - ١) = ٠

∴ س - ٣ = ٠ أو س - ١ = ٠

∴ س = ٣ أو س = ١

∴ مجموعة الحل هى { ٣ ، ١ }

أولاً: الحل البياني

لحل المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ بيانيًا نتبع الآتي:

- نرسم منحنى الدالة د حيث د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠
- نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، فتكون هي مجموعة حل المعادلة.

مثال ١

ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د (س) = س^{٢} - ٤ س + ٣ في الفترة [- ١، ٥]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : س^{٢} - ٤ س + ٣ = ٠

الحل

نعين بعض الأزواج المرتبة (س، ص) التي تنتمي لبيان الدالة د، والتي مسقطها الأول س ∈ [-١، ٥]

د (-١) = ٨، د (٠) = ٣، د (١) = ٠،
د (٢) = -١، د (٣) = ٠، د (٤) = ٣، د (٥) = ٨

نضع هذه الأزواج المرتبة في جدول كالآتي:

س	٥	٤	٣	٢	١	٠	-١
ص = د (س)	٨	٣	٠	-١	٠	٣	٨

نعين على المستوى الإحداثي النقط التي تمثل هذه الأزواج المرتبة، ثم نرسم منحنيًا ممهدًا يمر بهذه النقط.
من الرسم نجد أن منحنى الدالة د يقطع محور السينات في النقطتين (٣، ٠)، (١، ٠)
يسمى العددان ١، ٣ بجذري المعادلة س^{٢} - ٤ س + ٣ = ٠
وتكون مجموعة حل المعادلة هي {١، ٣}



في كراسة الرسم البياني أجب عن السؤالين التاليين:

١ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = س^{٢} + ٢س + ١ في الفترة [-٤، ٢] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة: س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠

٢ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د (س) = - س^{٢} + ٦ س - ١١ في الفترة [٠، ٦] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : س^{٢} - ٦ س + ١١ = ٠

ثانياً : الحل الجبري باستخدام القانون العام:



حل المعادلة : س^{٢} - ٦ س + ٧ = ٠ مستعينًا بفكرة إكمال المربع.

الحل : ∵ س^{٢} - ٦ س + ٩ + ٧ - ٩ = ٠

∴ (س - ٣)^{٢} - ٢ = ٠ ⟵ (س - ٣)^{٢} = ٢

س - ٣ = $\sqrt{٢}$ أ، س - ٣ = -$\sqrt{٢}$

س = ٣ + $\sqrt{٢}$ أ، س = ٣ - $\sqrt{٢}$

∴ س = ٣ ± $\sqrt{٢}$

يمكن حل معادلة الدرجة الثانية: $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ حيث أ، ب، جـ ∈ ح، أ ≠ ٠
باستخدام القانون العام.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$$ حيث أ ≠ ٠، أ، ب، جـ ∈ ح

أمثلة

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة $3 س^2 = 5 س - 1$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

الحل

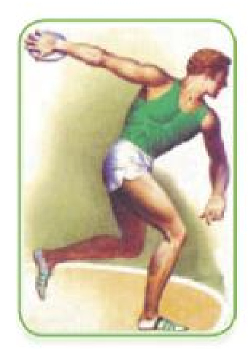
∵ $3 س^2 = 5 س - 1$ ∴ $3 س^2 - 5 س + 1 = 0$

∴ أ = ٣، ب = -٥، جـ = ١

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm 3,61}{6}$

إما $س = \frac{5 + 3,61}{6} = 1,44$ أ، $س = \frac{5 - 3,61}{6} = 0,23$

∴ مجموعة الحل هي: {١,٤٤، ٠,٢٣}



٤ في إحدى مسابقات رمي القرص كان مسار القرص بالنسبة لأحد اللاعبين يتبع العلاقة: $ص = -0,043 س^2 + 4,9 س + 13$ حيث س تمثل المسافة الأفقية بالمتر، ص تمثل ارتفاع القرص عن سطح الأرض. أوجد المسافة الأفقية التي يسقط عندها القرص بدءًا من نقطة القذف لأقرب جزء من مائة.

الحل

∵ أ = -٠,٠٤٣ ، ب = ٤,٩ ، جـ = ١٣

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ} = \frac{-(4,9) \pm \sqrt{(4,9)^2 - 4 \times (-0,043) \times 13}}{2 \times (-0,043)}$

$= \frac{(-4,9) \pm \sqrt{26,246}}{-0,086} = \frac{-4,9 \pm 5,123}{-0,086}$

إما $س = \frac{-4,9 + 5,123}{-0,086} = -2,59$ (مرفوض) لماذا؟

أ، $س = \frac{-4,9 - 5,123}{-0,086} = 116,546116$ متر

∴ المسافة الأفقية التي يسقط عندها القرص ١١٦,٥٥ متر.



حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية



سوف تتعلم

- كيفية حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية.

مصطلحات أساسية

- معادلة من الدرجة الأولى.
- معادلة من الدرجة الثانية.
- مجموعة الحل.

تمهيد:

نعلم أن المعادلة ٢ س - ص = ٣ هي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين، بينما المعادلات: $س^٢$ + ص = ٥، س ص = ٢ هي معادلات من الدرجة الثانية في متغيرين لماذا ؟

وسوف نقوم بحل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية، ويعتمد الحل على طريقة التعويض كما سيتضح من الأمثلة التالية.

حساب ذهني: إذا كان: س + ص = ١٠، $س^٢$ - $ص^٢$ = ٤٠ فأوجد س - ص.



أمثلة

١ أوجد جبريًا مجموعة الحل للمعادلتين:

ص + ٢ س + ١ = ٠ ، ٤ $س^٢$ + $ص^٢$ - ٣ س ص = ١



الحل

من المعادلة الأولى: ص = - (٢ س + ١) وبالتعويض في المعادلة الثانية.

∴ ٤ $س^٢$ + $[- (٢ س + ١)]^٢$ - ٣ س [- (٢س + ١)] = ١

∴ ٤ $س^٢$ + ٤ $س^٢$ + ٤ س + ١ + ٦ $س^٢$ + ٣ س - ١ = ٠

∴ ١٤ $س^٢$ + ٧س = ٠ ∴ ٧ س (٢ س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، ٢ س + ١ = ٠ أي أن س = $\frac{-١}{٢}$

وبالتعويض عن قيم س في المعادلة الأولى:

عندما س = ٠ ∴ ص = - (٠ + ١) = -١،

عندما س = $\frac{-١}{٢}$ ∴ ص = - (٢ × $\frac{-١}{٢}$ + ١) = ٠

∴ مجموعة الحل هي: {(٠، -١)، ($\frac{-١}{٢}$، ٠)}

٢ مستطيل محيطه ١٤ سم، ومساحته ١٢ سم^{٢}. أوجد كلاً من بعديه.

الحل

نفرض أن بعدي المستطيل س، ص

∵ محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض) ∴ ١٤ = ٢ (س + ص) ..... وبقسمة الطرفين على ٢

∴ س + ص = ٧ أي أن = ص = ٧ - س .... (١)

∵ مساحة المستطيل = الطول × العرض ∴ س ص = ١٢ ....(٢)

وبالتعويض من المعادلة (١) في المعادلة (٢):

∴ س (٧ - س) = ١٢ ٧ س - س^{٢} = ١٢

∴ س^{٢} - ٧ س + ١٢ = ٠ (س - ٣) (س - ٤) = ٠

∴ س = ٣ أو س = ٤ وبالتعويض في المعادلة (١)

عندما: س = ٣ ∴ ص = ٧ - ٣ = ٤،

عندما: س = ٤ ∴ ص = ٧ - ٤ = ٣ ∴ بعدا المستطيل هما ٣ سم، ٤ سم.

٣ عدد مكون من رقمين رقم آحاده ضعف رقم عشراته، إذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوى نصف العدد الأصلى. فما هو العدد؟

الحل

نفرض أن رقم الآحاد = س، رقم العشرات = ص

∴ العدد الأصلى = س + ١٠ ص

∵ رقم الآحاد ضعف رقم العشرات

∴ س = ٢ ص ⟵ (١)

∵ حاصل ضرب الرقمين = $\frac{١}{٢}$ العدد الأصلى

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ (س+ ١٠ ص) ⟵ (٢) بحل (١) ، (٢) معاً

∴ ٢ ص^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ ص

∴ ٢ ص^{٢} = ٦ ص ∴ ٢ ص (ص -٣) = ٠

∴ ص = ٣ أ، ص = ٠ (مرفوض) بالتعويض في المعادلة (١)

∴ س = ٦ ∴ العدد المطلوب = ٣٦



٢ - ١

الوحدة الثانية
الدوال الكسرية والعمليات عليها

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

سوف تتعلم

- كيفية إيجادُ مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود.

مصطلحات أساسية

- دالةٌ كثيرة الحدود.
- مجموعةُ أصفارِ الدالة.

فكر وناقش

إذا كانت د: ح ⟵ ح حيث د(س) = $س^٣$ - ٣$س^٢$ + ٢س كثيرةُ حدود من الدرجة الثالثة فى س أوجد : د(٠) ، د(١) ، د(٢) **ماذا تلاحظ؟**

نلاحظ أن: د(٠) = ٠ ، د(١) = ٠ ، د(٢) = ٠

لذا يسمى: ٠ ، ١ ، ٢ أصفاراً للدالة د .

وبصفة عامة

إذا كانت د: ح ⟵ ح كثيرة حدود فى س فإن مجموعةَ قيم س التى تجعل د(س) = ٠ تسمى مجموعة أصفار الدالة د، ويرمز لها بالرمز ص(د) .

أى أن: ص (د) هى مجموعةُ حَلِّ المعادلة د (س) = ٠

وعموما للحصولِ على أصفارِ الدالة د نضع د(س) = ٠ ونحلُّ المعادلةَ الناتجة لإيجاد مجموعة قيم س .

أمثلة

أوجد ص(د) لكل من دوال كثيرات الحدود الآتية:

١) $د_١$(س) = ٢س - ٤ ‏ ‏ ‏ ٢) $د_٢$(س) = $س^٢$ - ٩

٣) $د_٣$(س) = ٥ ‏ ‏ ‏ ٤) $د_٤$(س) = ٠

٥) $د_٥$(س) = $س^٢$ + ٤ ‏ ‏ ‏ ٦) $د_٦$(س) = $س^٦$ - ٣٢س

٧) $د_٧$(س) = $س^٢$ + س + ١

الحل

١) $د_١$(س) = ٢س - ٤ ‏ ‏ بوضع $د_١$ (س) = صفر ‏ ‏ ∴ ٢ س - ٤ = ٠

أى ٢س = ٤ ‏ ‏ ∴س = ٢ ‏ ‏ ∴ ص($د_١$) = {٢}.

٢ $د_٢(س) = س^٢ - ٩$

بوضع $د_٢(س) = $ صفر ∴ $س^٢ - ٩ = ٠$

أى $س^٢ = ٩$ ∴ $س = \pm ٣$ ∴ $ص(د_٢) = \{-٣ ، ٣\}$.

٣ ∵ $د_٣(س) = ٥$

∴ لا يوجد أيُّ عدد حقيقيٍّ يجعل $د_٣(س) = ٠$ ∴ $ص(د_٣)$ هو ϕ

٤ ∵ $د_٤(س) = ٠$

∴ جميعُ الأعدادِ الحقيقية ح تكون أصفارًا لهذه الدالة ∴ $ص(د_٤) = ح$

٥ بوضع $س^٢ + ٤ = ٠$

∴ $س^٢ = -٤$ ∴ $س = \pm \sqrt{-٤} \notin ح$ ∴ $ص(د_٥)$ هو ϕ

٦ بوضع $س^٦ - ٣٢س = ٠$

∴ $س(س^٥ - ٣٢) = ٠$ ∴ $س = ٠$ أ، $س^٥ = ٣٢$

وعندما $س^٥ = ٢^٥$ ∴ $س = ٢$ ∴ $ص(د_٦) = \{٠ ، ٢\}$

٧ بوضع $س^٢ + س + ١ = $ صفر

حيث يتعذَّر علينا تحليلُ المقدار $س^٢ + س + ١$ لذلك نلجأُ إلى استخدامِ القانون لحلِّ المعادلة التَّربيعية

فيكون $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث $أ = ١$ ، $ب = ١$ ، $جـ = ١$

∴ $س = \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢} \notin ح$

∴ لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة ويكون $ص(د_٧) = \phi$



١ أوجد مجموعةَ أصفار الدوال الآتية:

أ $د(س) = س^٣ - ٤س^٢$ ب $د(س) = س^٢ - ٢س + ١$ جـ $د(س) = س^٢ - ٢س - ١$

د $د(س) = س^٤ - س^٢$ هـ $د(س) = س^٢ - س + ١$ و $د(س) = س^٢ - ٢$



الدالةُ الكسريةُ الجبريةُ



سوف تتعلم

- مفهوم الدالةُ الكسريةُ الجبرية.

مصطلحات أساسية

- دالة كثيرة الحدود.
- مجال الكسر الجبرى.
- مجال مشترك لكسرين جبريين.



سبق أن درست العددَ النسبيَّ الذى على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠

فإذا كانت ق: ح ⟵ ح ، ق (س) = س + ٣ ،

د : ح ⟵ ح ، د (س) = س^{٢} - ٤.

١ أوجد مجال ق ، د .

٢ إذا كان ن(س) = $\frac{ق(س)}{د(س)}$ هل تستطيعُ إيجاد مَجال ن متى علم مجال كل من ق ، د؟

مما سبق نستنتج الآتي:

ن تسمى دالة كسرية جبرية أو كسرًا جبريًّا حيث ن(س) = $\frac{س + ٣}{س^{٢} - ٤}$

ويكون مجال ن فى هذه الحالة هو ح عدا قيم س التى تجعل الكسرَ غير معرف (مجموعة أصفار المقام).

أى أن: مجال ن هو ح - {-٢ ، ٢}

إذا كان ق ، د كثيرتى حدود، وكان ص (د) هى مجموعةُ أصفارِ د فإن الدالة ن حيث:

$$ن : ح - ص (د) ⟵ ح ، ن(س) = \frac{ق(س)}{د(س)}$$

تسمى دالةً كسريةً جبريةً حقيقيةً واختصارًا تسمى كسراً جبريًّا.

لاحظ أن: مجال الدالة الكسرية الجبرية = ح - مجموعة أصفار المقام.

المجالُ المشتركُ لكسرينِ جبريين أو أكثر :

المجالُ المشتركُ لكسرين جبريين أو أكثر هو مجموعةُ الأعدادِ الحقيقية التى تكونُ فيها هذه الكسورُ معرفةً معًا (فى آن واحد) .



إذا كان $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين حيث:

$ن_١(س) = \frac{١}{س - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٣}{س^٢ - ٤}$ فأوجد المجالَ المشتركَ لكلٍّ من $ن_١$ ، $ن_٢$

الحل

بفرض أن $م_١$ مجال $ن_١$ ، $م_٢$ مجال $ن_٢$.

$\because م_١ = ح - \{١\}$ ، $م_٢ = ح - \{-٢ ، ٢\}$ ويكون المجالُ المشتركُ للكسرين $ن_١$، $ن_٢ = م_١ \cap م_٢$

حيث: $م_١ \cap م_٢ = (ح - \{١\}) \cap (ح - \{-٢ ، ٢\})$

$= ح - \{-٢ ، ١ ، ٢\}$

يلاحظ أنه لأى قيمة للمتغير س تنتمى إلى المجالِ المشتركِ يكون كلٌّ من $ن_١(س)$، $ن_٢(س)$ معرفا (له وجود)

وعمومًا

إذا كان $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين وكان:

مجال $ن_١ = ح - س_١$ (حيث $س_١$ مجموعة أصفار مقام $ن_١$)

، مجال $ن_٢ = ح - س_٢$ (حيث $س_٢$ مجموعة أصفار مقام $ن_٢$)

فإن: المجال المشترك للكسرين $ن_١$ ، $ن_٢ = ح - (س_١ \cup س_٢)$

= ح − مجموعة أصفار مقامى الكسرين.

ويكون المجال المشترك لعدد من الكسور الجبرية

= ح − مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور.



تساوى كسرين جبريين

سوف تتعلم

- مفهوم تساوى كسرين جبريين.
- كيفية تحديد متى يتساوى كسران جبريان.

مصطلحات أساسية

- اختزال الكسر الجبرى.
- تساوى كسرين جبريين.

اختزال الكسر الجبرى

فكر وناقش

إذا كان ن كسرًا جبريًّا حيث: ن(س) = $\frac{س^٢ + س}{س^٢ - ١}$ فإن:

١ مجال ن = ح - {١، -١}

٢ العاملُ المشتركُ بين البسطِ والمقام بعد تحليلِ كل منهما تحليلاً كاملاً هو س + ١ ≠ صفر حيث س لا تأخذ القيمة ١، -١

٣ الكسرُ الجبريُّ فى أبسطِ صورةٍ بعد حذف العامل المشترك = $\frac{س}{س - ١}$

٤ هل يتغيرُ مجالُ الكسرِ الجبريِّ ن بعد وضعه فى أبسط صورة ؟

مما سبق نستنتج أن:

وضع الكسرِ الجبرى فى أبسط صورةٍ يسمى باختزال الكسر الجبرى.

وعند اختزالِ الكسر الجبرى نتبع الخطوات الآتية:

١ نحلل بسطَ ومقامَ الكسر الجبرى تحليلاً كاملاً.

٢ نعين مجالَ الكسر الجبرى قبل حذف العوامل المشتركة فى البسط والمقام.

٣ نحذف العواملَ المشتركةَ فى كلٍّ من البسط والمقام للحصول على أبسط صورة.

تعريف: يقالُ إن: الكسرَ الجبريَّ ن فى أبسط صورة له إذا لم توجد عواملُ مشتركةٌ بين بسطه ومقامه.



مثال ١

إذا كان ن(س) = $\frac{س^3 + س^2 - ٦س}{س^4 - ١٣س^2 + ٣٦}$ اختصر ن(س) إلى أبسط صورة مبينًا مجال ن.

الحل

$\because$ ن (س) = $\frac{س^3 + س^2 - ٦س}{س^4 - ١٣س^2 + ٣٦}$ = $\frac{س (س^2 + س - ٦)}{(س^2 - ٤) (س^2 - ٩)}$ = $\frac{س (س + ٣) (س - ٢)}{(س + ٢) (س - ٢) (س + ٣) (س - ٣)}$

$\therefore$ مجال ن(س) = ح - {-٣ ، -٢ ، ٢ ، ٣}.

اختزل (س + ٣) ، (س - ٢) من البسط والمقام . $\therefore$ ن(س) = $\frac{س}{(س + ٢) (س - ٣)}$

تساوى كسرين جبريين

فكر وناقش

أوجد فى أبسط صورةٍ كلاًمن $ن_1$(س) ، $ن_2$(س) مبيِّنا المجالَ لكلٍّ منهما فى كلٍّ مما يأتى:

١) $ن_1$(س) = $\frac{س + ٣}{س^2 - ٩}$ ، $ن_2$(س) = $\frac{٢}{٢س - ٦}$

٢) $ن_1$(س) = $\frac{٢س}{٢س + ٤}$ ، $ن_2$(س) = $\frac{س^2 + ٢س}{س^2 + ٤س + ٤}$

هل $ن_1$ = $ن_2$ فى كل حالة ؟ وضح أجابتك.

نلاحظ مما سبق أن:

١) $ن_1$(س) = $\frac{س + ٣}{(س + ٣) (س - ٣)}$ = $\frac{١}{س - ٣}$ **ومجال $ن_1$** = ح - {-٣ ، ٣}

$ن_2$(س) = $\frac{٢}{٢ (س - ٣)}$ = $\frac{١}{س - ٣}$ **ومجال $ن_2$** = ح - {٣}

أى أن: $ن_1$ ، $ن_2$ اختزلا إلى نفس الكسرِ، ولكن مجال $ن_1$ ≠ مجال $ن_2$

٢) $ن_1$(س) = $\frac{٢س}{٢ (س + ٢)}$ = $\frac{س}{س + ٢}$ **ومجال $ن_1$** = ح - {-٢}

$ن_2$(س) = $\frac{س (س + ٢)}{(س + ٢)^2}$ = $\frac{س}{س + ٢}$ **ومجال $ن_2$** = ح - {-٢}

أى أن: $ن_1$ ، $ن_2$ اختزلا إلى نفس الصورة ، مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$

مما سبق نستنتجَ أن:

يقال إن الدالتين $ن_1$ ، $ن_2$ متساويتان(أى : $ن_1$ = $ن_2$) إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$ ، $ن_1$(س) = $ن_2$(س) لكل س ∈ المجال المشترك .

أمثلة

٢ إذا كانت $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$ **أثبت أن :** $ن_١ = ن_٢$

الحل

∵ $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢} = \frac{س^٢}{س^٢ (س - ١)}$ ∴ $ن_١(س) = \frac{١}{س - ١}$

ومجال $ن_١ = ح - \{٠ ، ١\}$ ①

∵ $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س} = \frac{س (س^٢ + س + ١)}{س (س^٣ - ١)} = \frac{س (س^٢ + س + ١)}{س (س-١) (س^٢ + س + ١)}$

∴ $ن_٢(س) = \frac{١}{س - ١}$

ومجال $ن_٢ = ح - \{٠ ، ١\}$ ②

من ① ، ②

∵ مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ ، $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لكل س ∈ ح - {٠ ، ١} ∴ $ن_١ = ن_٢$

٣ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٩س}$

فأثبت أن $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجالِ المشتركِ، وأوجد هذا المجال .

الحل

∵ $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦} = \frac{(س + ٢) (س - ٢)}{(س + ٣) (س - ٢)} = \frac{س + ٢}{س + ٣}$

ومجال $ن_١ = ح - \{-٣ ، ٢\}$ ①

∵ $ن_٢(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٩س} = \frac{س(س - ٣) (س + ٢)}{س(س + ٣) (س - ٣)} = \frac{س + ٢}{س + ٣}$

ومجال $ن_٢ = ح - \{-٣ ، ٠ ، ٣\}$ ②

من ① ، ②

نلاحظ أن: $ن_١$ (س) ، $ن_٢$ (س) اختزلا إلى نفس الكسر $\frac{س + ٢}{س + ٣}$.

إلا أن مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$ لذلك $ن_١ \neq ن_٢$.

ونستطيعُ أن نقول إن: $ن_١ (س) = ن_٢ (س)$ يأخذان نفس القيم إذا كانت س تنتمى إلى المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ وهو ح - {-٣ ، ٠ ، ٢ ، ٣} .



العملياتُ على الكسورِ الجبريَّة



سوف تتعلم

☆ كيفية إجراء العمليات (+ ، − ، × ، ÷) على الكسور الجبرية

مصطلحات أساسية

☆ معكوس جمعي للكسر الجبري.

☆ معكوس ضربى للكسر الجبري.

أولاً : جمع و طرح الكسور الجبرية :

فكر وناقش

(١) إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ب}$ عددين نسبيين فأوجد كلاً من:

$\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{ب}$ ، $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{ب}$

(٢) إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ عددين نسبيين فأوجد كلاً من:

$\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د}$ ، $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د}$

مما سبق يمكننا إجراءُ عملية جمع أو طرح كسرين جبريين متحدى أو مختلفى المقام كالآتى :

إذا كان س ∈ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_1$ ، $ن_2$ حيث:

(١) $ن_1(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \frac{د_3(س)}{د_2(س)}$

(كسرين جبريين متحدى المقام)

فإن: $ن_1(س) + ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} + \frac{د_3(س)}{د_2(س)} = \frac{د_1(س) + د_3(س)}{د_2(س)}$ ،

$ن_1(س) - ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} - \frac{د_3(س)}{د_2(س)} = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} + \frac{-د_3(س)}{د_2(س)}$

(٢) $ن_1(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

(كسرين جبريين مختلفى المقام)

فإن: $ن_1(س) + ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} + \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

$= \frac{د_1(س) \times د_4(س) + د_3(س) \times د_2(س)}{د_2(س) \times د_4(س)}$ ،

$ن_1(س) - ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} - \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

$= \frac{د_1(س) \times د_4(س) - د_3(س) \times د_2(س)}{د_2(س) \times د_4(س)}$

أمثلة

١ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س}{س^٢ + ٢س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س + ٢}{س^٢ - ٤}$

فأوجد $ن(س) = ن_١(س) + ن_٢(س)$ مبينا مجال ن.

الحل

∵ $ن(س) = ن_١(س) + ن_٢(س)$

∴ $ن(س) = \frac{س}{س^٢ + ٢س} + \frac{س + ٢}{س^٢ - ٤} = \frac{س}{س(س + ٢)} + \frac{س + ٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$

مجال ن = ح - {-٢ ، ٠ ، ٢}

∴ $ن(س) = \frac{١}{س + ٢} + \frac{١}{س - ٢} = \frac{س - ٢ + س + ٢}{(س + ٢)(س - ٢)} = \frac{٢س}{(س + ٢)(س - ٢)}$

٢ أوجد: ن(س) فى أبسطِ صورةٍ مبيناً مجال الدالة ن حيث:

$ن(س) = \frac{٣س - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦} + \frac{٢س + ٦}{س^٢ + س - ٦}$

الحل

∵ $ن(س) = \frac{٣س - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)} + \frac{٢(س + ٣)}{(س - ٢)(س + ٣)}$

مجال ن = ح - {-٣ ، ٢ ، ٣}

∴ $ن(س) = \frac{٣س - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)} + \frac{٢}{س - ٢}$

∵ م.م.أ للمقامات = (س - ٣)(س - ٢) وبضرب حدى الكسر الثانى فى (س - ٣)

∴ $ن(س) = \frac{٣س - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)} + \frac{٢(س - ٣)}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{٣س - ٤ + ٢س - ٦}{(س - ٢)(س - ٣)}$

$= \frac{٥س - ١٠}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{٥(س - ٢)}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{٥}{س - ٣}$

٣ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث :

$ن(س) = \frac{١٢}{١٢س^٢ - ٣} + \frac{٢}{٢س - ٤س^٢}$ ، ثم أوجد ن(٠) ، ن(-١) إن أمكن ذلك.

الحل

$\because ن(س) = \frac{١٢}{١٢س^٢ - ٣} + \frac{٢}{- ٤س^٢ + ٢س}$ (الترتيب تنازلى حسب قوى س)

$= \frac{١٢}{١٢س^٢ - ٣} + \frac{٢}{-(٤س^٢ - ٢س)}$

$= \frac{١٢}{٣(٤س^٢ - ١)} - \frac{٢}{٢س(٢س - ١)}$

$= \frac{٤}{(٢س + ١)(٢س - ١)} - \frac{١}{س(٢س - ١)}$ (التحليل)

مجال د = ح - $\{\frac{-١}{٢} ، ٠ ، \frac{١}{٢}\}$

م.م.أ للمقامات = س (٢س + ١) (٢س - ١)

$\therefore ن(س) = \frac{٤س}{س(٢س + ١)(٢س - ١)} - \frac{٢س + ١}{س(٢س + ١)(٢س - ١)}$

$\therefore ن(س) = \frac{٤س - (٢س + ١)}{س(٢س + ١)(٢س - ١)} = \frac{٤س - ٢س - ١}{س(٢س + ١)(٢س - ١)}$

$= \frac{٢س - ١}{س(٢س + ١)(٢س - ١)} = \frac{١}{س(٢س + ١)}$

ن(٠) ليس لها وجود لأن الصفر ∌ مجال الدالة ن ،

$ن(-١) = \frac{١}{-١ \times (-٢ + ١)} = \frac{١}{-١ \times -١} = ١$

ثانيًا : ضرب وقسمة الكسور الجبرية

فكر وناقش

لكل كسر جبري ن(س) ≠ ٠ يوجد معكوس ضربي هو مقلوب الكسر ويرمز له بالرمز $ن^{-1}$(س)

فإذا كان ن(س) = $\frac{س + ٢}{س + ٥}$ فإن $ن^{-1}$(س) = $\frac{س + ٥}{س + ٢}$

حيث مجال ن = ح - {- ٥} ، مجال $ن^{-1}$ = ح - {- ٢، - ٥}

ويكون ن(س) × $ن^{-1}$(س) = ١

مما سبق يمكننا إجراءُ عمليَّة ضرب أو قسمة كسرين جبريين على النَّحو الآتى:

إذا كان $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين حيث :

$ن_١(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)}$ فإن :

١ $ن_١(س) \times ن_٢(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} \times \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)} = \frac{د_١(س) \times د_٣(س)}{د_٢(س) \times د_٤(س)}$

ويكون مجال $ن_١$(س) × $ن_٢$(س) هو ح - (ص ($د_٢$) ∪ ص ($د_٤$))

٢ $ن_١(س) \div ن_٢(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} \div \frac{د_٣(س)}{د_٤(س)} = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} \times \frac{د_٤(س)}{د_٣(س)}$

ويكون مجال $ن_١$(س) ÷ $ن_٢$(س) هو المجال المشترك لكل من $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٢^{-1}$

أى ح - (ص($د_٢$) ∪ ص($د_٣$) ∪ ص($د_٤$))

أمثلة

٤ إذا كانت ن(س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - س - ٢} \times \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{٣س^٢ + ١٦س + ٥}$

فأوجد ن(س) فى أبسط صورة وعين مجالها ثم أوجد ن(٠) ، ن(-١) إن أمكن ذلك.

الحل

ن(س) = $\frac{س + ١}{(س - ٢)(س + ١)} \times \frac{(س + ٥)(س - ٢)}{(٣س + ١)(س + ٥)}$

= $\frac{(س + ١)(س + ٥)(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)(٣س + ١)(س + ٥)} = \frac{١}{٣س + ١}$ (أبسط صورة)

ومجال ن = ح - {-٥ ، -١ ، $-\frac{١}{٣}$ ، ٢} ، ن(٠) = ١،

ن (-١) ليس لها وجود لأن -١ ∉ مجال ن .

٥ إذا كانت ن(س) = $\frac{س^٢ - ٩}{٢س^٢ + ٣س} \div \frac{٣س^٢ + ٦س - ٤٥}{٤س^٢ - ٩}$

فأوجد ن(س) فى أبسط صورةٍ موضِّحًا مجال ن .

الحل

$\because$ ن(س) = $\frac{س^٢ - ٩}{٢س^٢ + ٣س} \div \frac{٣(س^٢ + ٢س - ١٥)}{٤س^٢ - ٩}$ $\therefore$ ن(س) = $\frac{(س + ٣)(س - ٣)}{س (٢س + ٣)} \div \frac{٣ (س + ٥)(س - ٣)}{(٢س + ٣)(٢س - ٣)}$

مجال ن = ح - {٠ ، - $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، -٥ ، ٣}

$\therefore$ ن(س) = $\frac{(س + ٣)(س - ٣)}{س (٢س + ٣)} \times \frac{(٢س + ٣)(٢س - ٣)}{٣(س + ٥)(س - ٣)}$

= $\frac{(س + ٣)(س - ٣)(٢س + ٣)(٢س - ٣)}{٣س (٢س + ٣)(س + ٥)(س - ٣)}$ = $\frac{(س + ٣)(٢س - ٣)}{٣س (س + ٥)}$

٦ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن:

$$ن (س) = \frac{س^٢ + ٢ س}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س ٢ + ٣ س + ٩}$$

ثم أوجد ن (٢)، ن (-٢) إن أمكن.

الحل

$$ن (س) = \frac{س^٢ + ٢ س}{س^٣ - ٢٧} \times \frac{س^٢ + ٣ س + ٩}{س + ٢}$$

$$= \frac{س (س + ٢)}{(س - ٣)(س٢ + ٣س + ٩)} \times \frac{(س٢ + ٣ س + ٩)}{(س + ٢)}$$

$\therefore$ مجال ن = ح - {٣ ، -٢}

$\therefore$ ن (س) = $\frac{س}{س - ٣}$

، ن (٢) = $\frac{٢}{٢ - ٣}$ = -٢

، ن (-٢) غير معرفة لأن -٢ $\notin$ مجال ن


الاحتمال
الوحدة الثالثة: الاحتمال



العمليات على الأحداث



سوف تتعلم

- إجراء العمليات على الأحداث (التقاطع – الاتحاد).

مصطلحات أساسية

- تقاطع
- اتحاد
- حدثان متنافيان
- شكل فن.

التقاطع و الاتحاد

تعلم أن:

إذا أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائيًا.
ولوحظ العددُ الظاهرُ على الوجه العلويِّ فإن:

١ فضاء العينة (ف) = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }.

٢ حدث ظهور العدد ٧ هو ϕ ويسمى الحدث المستحيل
واحتمال ظهوره = صفر

٣ حدث ظهور عدد أقل من ٩ هو ف ويسمى الحدث المؤكد
واحتمال ظهوره = ١

٤ حدث ظهور عدد أولي زوجي هو{ ٢ } وهو مجموعة جزئية من ف
واحتمال وقوعه = $\frac{١}{٦}$

فإذا كان أ حدث من ف أي: أ $\subset$ ف فإن: ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

حيث: ن (أ) عددُ عناصر الحدث أ، ن (ف) عدد عناصر فضاء العينة ف،
ل (أ) احتمال وقوع الحدث أ

نلاحظ أن: يمكنُ كتابةُ الاحتمالِ فى صورةِ كسرٍ أو نسبة مئويَّة كما يلى:

مؤكد الحدوث	غالباً	أحيانًا	نادراً	مستحيل الحدوث
١	$\frac{٣}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	٠
٪١٠٠	٪٧٥	٪٥٠	٪٢٥	٪٠



العملياتُ على الأحداثِ:

حيث إن الأحداث هى مجموعاتٌ جزئيةٌ من فضاء العينة (ف)، لذلك فإن العملياتِ على الأحداثِ هى نفس العملياتِ على المجموعات مثل الاتحاد والتقاطع، وباعتبار فضاء العينة (ف) المجموعة الشاملة نستطيع التعبير عن الأحداث والعمليات عليها بأشكال ڤن كما يلى:

أولاً: التقاطع

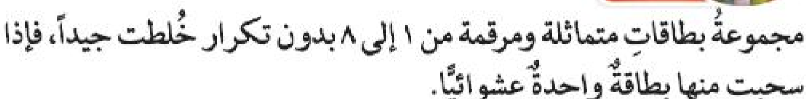
إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن تقاطعَ الحدثينِ أ، ب والذى يرمزُ له بالرمز أ ∩ ب يعنى حدث وقوع أ و ب معًا.

أ ∩ ب

ف

ب ا

لاحظ أن: يُقال إن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتجُ التَّجربة عنصرًا من عناصرِ المجموعةِ التى تعَبِّر عن هذا الحدث.



مثال (١)

مجموعةُ بطاقاتٍ متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ بدون تكرار خُلطت جيداً، فإذا سحبت منها بطاقةٌ واحدةٌ عشوائيًا.

١ اكتب فضاء العينة

٢ اكتب الأحداث الآتية.

أ الحدث أ: أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًا.

ب الحدث ب: أن تحمل البطاقةُ المسحوبة عددًا أوليًا.

جـ الحدث جـ: أن تحمل البطاقةُ المسحوبةُ عددًا يقبلُ القسمةَ على ٤.

٣ باستخدامِ أشكال ڤن احسب احتمال:

أ حدث وقوع الحدثين أ، ب معًا.　　ب حدث وقوع الحدثين أ، جـ معًا.

جـ حدث وقوع الحدثين ب، جـ معًا.

الحل

١ ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨} ، ن (ف) = ٨

٢ أ أ = {٢، ٤، ٦، ٨}

ب ب = {٢، ٣، ٥، ٧}

جـ جـ = {٤، ٨}



③ باستخدام شكل ڤن المقابل نجد أن:

أ حدث وقوع الحدثين ا، ب معًا يعنى ا ∩ ب حيث:

ا ∩ ب = {٢} وهى مجموعة ذات عنصر واحد

∴ ن (ا ∩ ب) = ١

∴ احتمال وقوع الحدثين ا، ب معًا = ل (ا ∩ ب)

$= \frac{\text{ن (ا ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١}{٨}$

ب حدثُ وقوع الحدثين ا، جـ معًا يعنى ا ∩ جـ حيث:

ا ∩ جـ = {٤، ٨} ∴ ن (ا ∩ جـ) = ٢

∴ احتمال وقوعِ الحدثين ا، جـ معًا = ل (ا ∩ جـ) $= \frac{\text{ن (ا ∩ جـ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

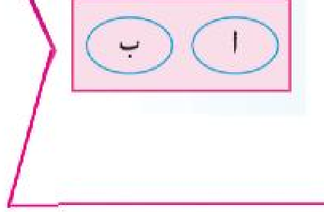
جـ حدث وقوع الحدثينِ ب، جـ معًا يعنى ب ∩ جـ حيث:

ب ∩ جـ = ϕ (لأن ب، جـ مجموعتان منفصلتان أو متباعدتان)، ن (ب ∩ جـ) = صفر

∴ احتمال وقوع الحدثين ب، جـ معًا = ل (ب ∩ جـ) $= \frac{\text{ن (ب ∩ جـ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٠}{٨} =$ صفر

لاحظ أن: الحدثين ب، جـ لا يمكن وقوعهما فى آن واحد، ولذلك يقال إن الحدثين ب، جـ حدثان متنافيان.

الأحداثُ المتنافيةُ:



يقال إن الحدثين ا، ب متنافيان إذا كان ا ∩ ب = ϕ

ويكون ل (ا ∩ ب) $= \frac{\text{عدد عناصر } \phi}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{\text{صفر}}{\text{عدد عناصر ف}} =$ صفر

ويقال لعدةِ أحداثٍ أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

مثال ② إذا أُلقى حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائيا، ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى.

أولا: اكتب فضاء العينة ف.

ثانيا: أوجد ما يأتى:

ا : حدث ظهور عدد زوجي. ب : حدث ظهور عدد فردى.

جـ : حدث ظهور عدد أولى.

ثالثا:

١ أوجد ل (ا ∩ ب) ٢ هل الأحداث ا، ب، جـ أحداث متنافية؟

الحل

أولا: ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

ثانيا: ا = {٢، ٤، ٦}

ب = {١، ٣، ٥}

جـ = {٢، ٣، ٥}

ثالثا: ١ ∵ ا ∩ ب = ϕ

∴ ل (ا ∩ ب) = صفر

٢ ا ∩ جـ = {٢} ، ب ∩ جـ = {٣ ، ٥}

∴ الأحداث ا، ب، جـ غير متنافية.

ثانياً: الاتحاد

إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن اتحادَ الحدثينِ، والذى يُرمز له بالرمز أ ∪ ب يعنى حدثَ وقوع الحدثين أ أو ب أو كليهما، أى حدث وقوع أحدهما على الأقل.

مثال (٣)

① تسع بطاقاتٍ متماثلة مرقَّمة من ١ إلى ٩ سحبت منها بطاقةٌ واحدةٌ عشوائيًّا.

أولاً: اكتب فضاء العينة.

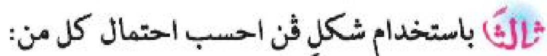


ثانيًا اكتب الأحداث الآتية:

أ أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًّا.

ب أن تحمل البطاقةُ المسحوبة عددًا يقبل القسمة على ٣.

جـ أن تحمل البطاقةُ المسحوبةُ عددًا أوليًّا أكبر من ٥.



ثالثًا باستخدام شكلِ فن احسب احتمال كل من:

أ حدث وقوع أ أو ب ب حدث وقوع أ أو جـ

جـ أوجد ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب) ماذا تلاحظ ؟

الحل

أولاً ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} ، ن (ف) = ٩

ثانيًا أ = {٢، ٤، ٦، ٨} ، ن (أ) = ٤ ، ب = {٣، ٦، ٩} ، ن (ب) = ٣ ، جـ = {٧} ، ن (جـ) = ١

ثالثًا من شكل فن المقابل:

أ حدث وقوع أ أو ب يعنى أ ∪ ب

حيث: أ ∪ ب = {٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ٩}، ن(أ ∪ ب) = ٦

∴ احتمال وقوع أ أو ب = ل (أ ∪ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

ب حدثُ وقوع أ أو جـ يعنى أ ∪ جـ وهما مجموعتان منفصلتان.

فيكون أ ∪ جـ = {٢، ٤، ٦، ٨، ٧} ، ن (أ ∪ جـ) = ٥

∴ احتمال وقوع أ أو جـ = ل (أ ∪ جـ) = $\frac{\text{ن (أ ∪ جـ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٥}{٩}$

جـ ل (أ) = $\frac{ن (أ)}{ن (ف)} = \frac{٤}{٩}$ ، ل(ب) = $\frac{ن (ب)}{ن (ف)} = \frac{٣}{٩}$

أ ∩ ب = {٦} ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{ن (أ ∩ ب)}{ن (ف)} = \frac{١}{٩}$

ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{٩} + \frac{٣}{٩} - \frac{١}{٩} = \frac{٢}{٣}$ **(١)**

، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٢}{٣}$ **(٢)**

من **(١)**، **(٢)** يكون

ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = ل (أ ∪ ب)

يلاحظُ أن أ، جـ حدثان متنافيان .

فيكون ل (أ ∪ جـ) = ل (أ) + ل (جـ) - ل (أ ∩ جـ) لكن ل (أ ∩ جـ) = صفر

لكن ل (أ ∩ جـ) = صفر

∴ ل (أ ∪ جـ) = $\frac{٤}{٩} + \frac{١}{٩}$ - صفر

= $\frac{٥}{٩}$ كما سبق إيجاده

أى أنه إذا كان أ، جـ حدثين متنافيين فإن ل (أ ∪ جـ) = ل (أ) + ل(جـ)

مثال (٤)

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ما، وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فأوجد ل (ب).

الحل

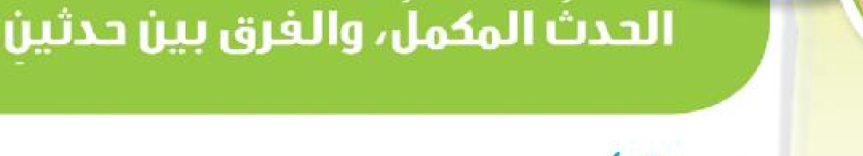
∵ أ ∩ ب = ϕ

∴ ل (أ) + ل (ب) = ل (أ ∪ ب)

$\frac{١}{٣}$ + ل (ب) = $\frac{٧}{١٢}$

∴ ل (ب) = $\frac{٧}{١٢} - \frac{٤}{١٢} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$







سوف تتعلم

☆ مفهوم الحدث المكمل

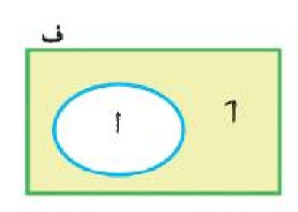
☆ مفهوم الفرق بين حدثين

مصطلحات أساسية

☆ حدث مكمل

☆ فرق بين حدثين

لاحظ أن:



فى شكل ڤن المقابل:

إذا كانت ف المجموعة الشاملة، أ ⊂ ف

فإن مكمله المجموعة أ هى أ̄ ويلاحظ أن:

١ أ ∪ أ̄ = ف ، أ ∩ أ̄ = ϕ

٢ إذا كانت ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧} ، أ = {٢، ٤، ٦} فإن: أ̄ = {١، ٣، ٥، ٧}

مما سبق نلاحظُ أن: إذا كان ف فضاء العينةِ لتجربة عشوائية، و سحبت كرة واحدة من صندوق به كرات متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٧ وملاحظة الرقم عليها.

أ حدث ظهور عدد زوجى: أ = {٢، ٤، ٦}

أ̄ حدث ظهور عدد فردى: أ̄ = {١، ٣، ٥، ٧} وهو حدث مكمل للحدث أ

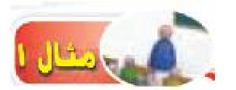
ثالثا: الحدثُ المكمل:

الحدثُ المكمل للحدث أ هو أ̄ وهو حدث عدم وقوع أ.

أى أن: إذا كان أ ⊂ ف فإن أ̄ هو الحدث المكمل للحدث أ

حيث أ ∪ أ̄ = ف ، أ ∩ أ̄ = ϕ

أى أن الحدث والحدث المكمل له هما حدثان متنافيان.



إذا كان ف فضاء العينة لتجربةٍ عشوائية، أ ⊂ ف، أ̄ هو الحدث المكمل للحدث أ، ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

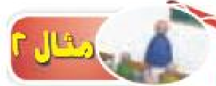
أكمل الجدول التالى وسجِّل ملاحظاتك. (بكراسة الفصل)

الحدث أ	الحدث أ̄	ل (أ)	ل (أ̄)	ل (أ) + ل (أ̄)
{٢، ٤، ٦}	{١، ٣، ٥}	$\frac{٢}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١
{١، ٢، ٣، ٤، ٥}	{٣، ٦}	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	
{٥}		$\frac{١}{٦}$		
{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}			صفر	

من الجدولِ السابق لاحظ ان: ل (أ) + ل (أ̄) = ١ فيكون: ل (أ̄) = ١ - ل (أ) ، ل (أ) = ١ - ل (أ̄)

ملاحظة: ل (أ) + ل (أ̄) = ل (ف) = ١



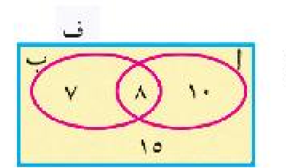


١ فصلٌ دراسيٌّ به ٤٠ تلميذاً منهم ١٨ تلميذاً يقرءون جريدة الأخبار، ١٥ تلميذاً يقرءون جريدةَ الأهرام، ٨ تلاميذ يقرءون الجريدتين معًا. فإذا اختير تلميذ عشوائي من هذا الفصل، احسب احتمال أن يكون التلميذ:

أ يقرأ جريدة الأخبار. ب لا يقرأ جريدة الأخبار.

جـ يقرأ جريدة الأهرام. د يقرأ الجريدتين معًا.

الحل



بفرض أن أ حدث قراءة جريدة الأخبار ، ب حدث قراءة جريدة الأهرام فيكون أ ∩ ب هو حدث قراءة الجريدتين معًا.

ويكون ن (ف) = ٤٠ ، ن (أ) = ١٨ ، ن (ب) = ١٥ ، ن (أ ∩ ب) = ٨

أ الحدث أ: يقرأ جريدة الأخبار فيكون ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١٨}{٤٠} = \frac{٩}{٢٠}$

ب لا يقرأ جريدة الأخبار حدث مكمل للحدث أ وهو أَ

∴ ل (أَ) = $\frac{\text{عدد عناصر المجموعة أَ}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١٥ + ٧}{٤٠} = \frac{٢٢}{٤٠} = \frac{١١}{٢٠}$

حل آخر: ل (أَ) = ١ - ل (أ) = ١ - $\frac{٩}{٢٠} = \frac{١١}{٢٠}$

جـ الحدث ب: يقرأ جريدة الأهرام فيكون: ل (ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١٥}{٤٠} = \frac{٣}{٨}$

د الحدث أ ∩ ب يعنى قراءة الجريدتين معًا

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٨}{٤٠} = \frac{١}{٥}$



فكر هل حدث أن يقرأ جريدة الأخبارِ يعنى حدث أن يقرأ جريدةَ الأخبارِ فقط؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن: حدث أن يقرأ جريدةَ الأخبار يمثل بشكل ڤن المقابل بالمجموعة أ بينما حدث أن يقرأ جريدة الأخبار فقط تعنى قراءة جريدة الأخبار دون قراءة أى جريدة أخرى وتمثل بالمجموعة أ - ب **وتقرأ أ فرق ب**

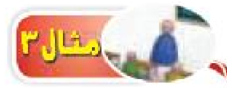
ف ب أ أ - ب

رابعا: الفرقُ بين حدثين

إذا كان أ، ب حدثين من ف فإن أ - ب هو حدث وقوع أ وعدم وقوع ب أى حدث وقوع أ فقط.

لاحظ أن: (أ - ب) ∪ (أ ∩ ب) = أ





إذا كان : ا ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان ل(أ) = ٠,٧ ، ل (ا ∩ ب) = ٠,٣
فأوجد : ل(ا − ب)

الحل:

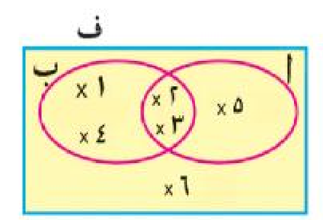
∵ (ا − ب) ∪ (ا ∩ ب) = ا
∴ ل(ا − ب) + ل (ا ∩ ب) = ل (ا)
∴ ل(ا − ب) + ٠,٣ = ٠,٧
∴ ل(ا − ب) = ٠,٧ − ٠,٣ = ٠,٤



فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإذا كان ا هو حدث الحصول على عدد أولى ، ب هو حدث الحصول على عدد أقل من ٥
فأوجد :

(١) احتمال وقوع الحدث ا فقط
(٢) احتمال وقوع الحدث ب فقط

الحل



ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ،
أ = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

(١) حدث وقوع الحدث ا فقط = ا − ب = {٥} ∴ ن (ا − ب) = ١

احتمال وقوع الحدث ا فقط = ل (ا − ب) = $\frac{\text{ن (ا − ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١}{٦}$

(٢) حدث وقوع الحدث ب فقط = ب − ا = {١ ، ٤} ∴ ن (ب − ا) = ٢

احتمال وقوع الحدث ب فقط = $\frac{\text{ن (ب − ا)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

الهندسة المستوية

الوحدة الرابعة: الدائرة









يجب أن يعرف سائقو السيارات دلالة علامات المرور جيدا والتمييز بينها

ابحث فى مصادر المعرفة المختلفة (ادارة المرور - المكتبة- الانترنت ...) عن دلالة علامات المرور





٤ - ١

تعاريف ومفاهيم أساسية



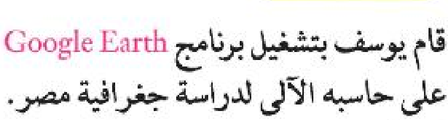
سوف تتعلم

- ☆ المفاهيم الأساسية المتعلقة بالدائرة.
- ☆ مفهوم محور التماثل فى الدائرة.

مصطلحات أساسية

- ☆ دائرة
- ☆ سطح دائرة
- ☆ نصف قطر دائرة
- ☆ وتر
- ☆ قطر دائرة
- ☆ محور تماثل دائرة

فكر وناقش





قام يوسف بتشغيل برنامج Google Earth على حاسبه الآلى لدراسة جغرافية مصر. لاحظ يوسف وجود بعض المسطحات الخضراء الدائرية الشكل بجوار المناطق الصحراوية، فسأل والده عنها.

قال الوالد: تعلم أن قطرة ماء تعنى ينبوع حياة، لذلك نرشد استهلاك المياه، فنروى الأراضى بطريقة الرى المحورى (رى بالرش)، وفيها تدور عجلات آلة الرى حول نقطة ثابتة فترسم هذه الدوائر.

١ كيف يمكنك رسم دائرة منتصف ملعب كرة القدم؟

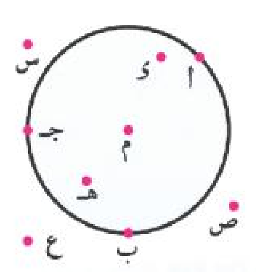
٢ ما دورك فى ترشيد استهلاك المياه؟

الدائرة: هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة من المستوى تسمى "مركز الدائرة" ويسمى البعد الثابت "طول نصف قطر الدائرة".



يرمز للدائرة عادة بمركزها، فنقول الدائرة م لنعنى الدائرة التى مركزها النقطة م. **كما فى الشكل المقابل.**

عند رسم دائرة م فى المستوى، فإنها تقسم نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط كما بالشكل، وهى:



١ مجموعة النقط داخل الدائرة

مثل النقط: م، ى، هـ، ....

٢ مجموعة النقط على الدائرة

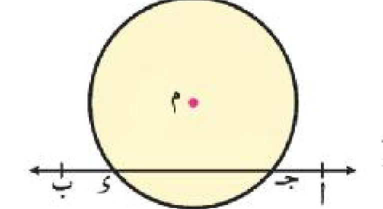
مثل النقط: أ، ب، جـ، ....

٣ مجموعة النقط خارج الدائرة

مثل النقط: س، ص، ع، ....

سطح الدائرة: هو مجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقط داخل الدائرة.



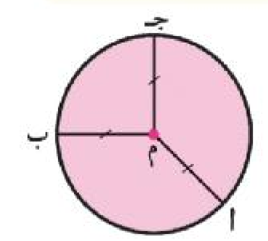


في الشكل المقابل، لاحظ أن:

(١) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ الدائرة م = {جـ ، ى} (٢) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{جـى}}$

(٣) م ∉ الدائرة م، م ∈ سطح الدائرة م

نصف قطر الدائرة: هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهايتاها) مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة.



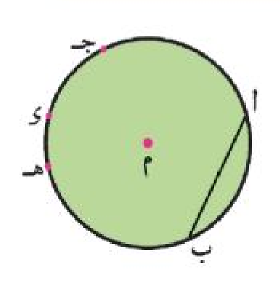
في الشكل المقابل $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ أنصاف أقطار للدائرة م حيث:

م أ = م ب = م جـ = طول نصف قطر الدائرة (نق)

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفي قطريهما

الوتر: هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهايتاها) أي نقطتين على الدائرة



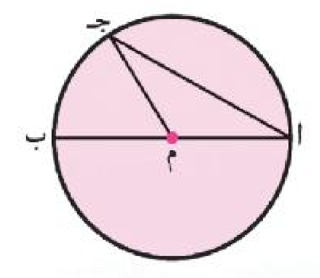


في الشكل المقابل:

ارسم جميع أوتار الدائرة التي تمر بأزواج النقط أ ، ب ، جـ ، ى ، هـ







(١) أي الأوتار في **الشكل المقابل** قطر في الدائرة م؟

(٢) ما عدد أقطار أي دائرة؟

(٣) لإثبات أن قطر الدائرة هو أكبر أوتارها طولاً:

في المثلث أ م جـ: أ م + م جـ > أ جـ

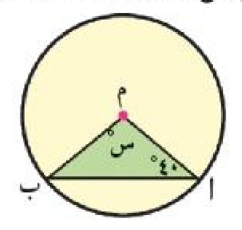
في الدائرة م: جـ م = ب م (أنصاف أقطار)

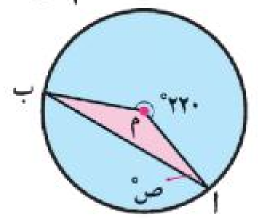
فيكون: أ م + م ب > أ جـ ∴ أ ب > أ جـ

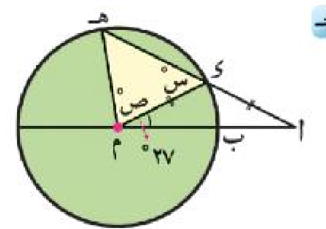


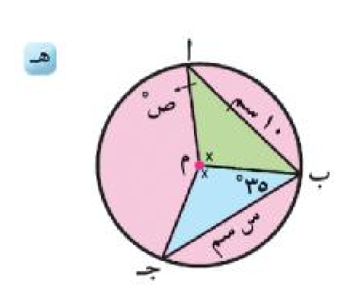


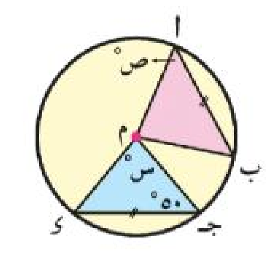
في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:

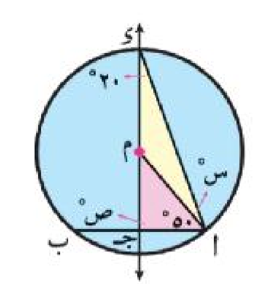
أ


ب


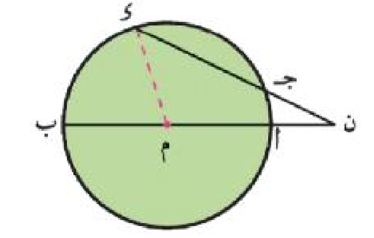
جـ


د


هـ


و






في الشكل المقابل: $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م. $\overleftrightarrow{\text{ب أ}} \cap \overleftrightarrow{\text{ء جـ}}$ = {ن}.

أثبت أن: ن ب > ن ء

الحل

نرسم نصف القطر $\overline{\text{م ء}}$ ، في Δ ن م ء: م ن + م ء > ن ء

∵ م ب = م ء (أنصاف أقطار)

∴ م ن + م ب > ن ء

∴ ن ب > ن ء (وهو المطلوب)



في المثال السابق أثبت أن: ن جـ > ن أ.

التماثل فى الدائرة



نشاط ١

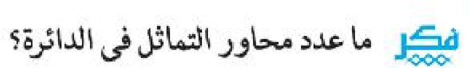
١ ارسم الدائرة م على ورقه شفافة باستخدام الفرجار.
٢ ارسم مستقيمًا ل١ يمر بمركز الدائرة و يقسمها إلى قوسين.
٣ اطوِ الورقة حول المستقيم ل١، ماذا تلاحظ؟
٤ ارسم مستقيمًا آخر ل٢ يمر بمركز الدائرة ثم اطوِ الورقة حوله .

كرر العمل عدة مرات برسم المستقيمات ل٣، ل٤، .... ماذا تلاحظ فى كل حالة؟

من النشاط السابق نستنتج أن:

أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها





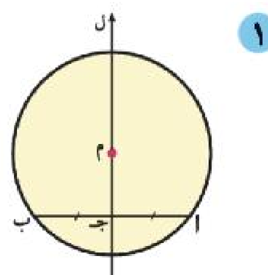
فكر ما عدد محاور التماثل فى الدائرة؟

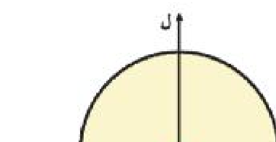


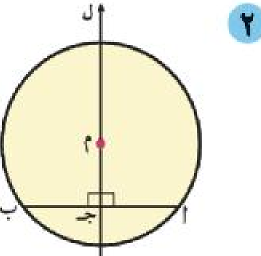
نشاط ٢

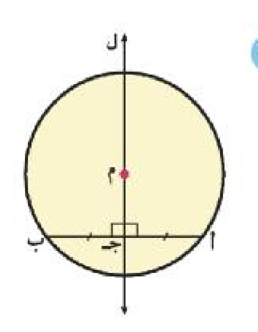
ادرس كلاً من الأشكال التالية (المعطيات كما بالرسم)، ماذا تستنتج؟















نتائج هامة

من ١	المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديًا على هذا الوتر.
من ٢	المستقيم المار بمركز الدائرة عموديًا على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر.
من ٣	المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة.

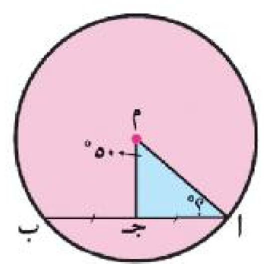


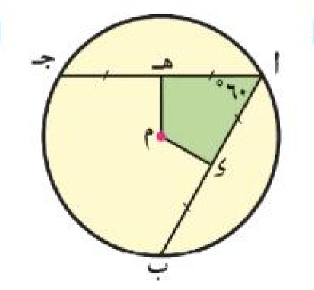


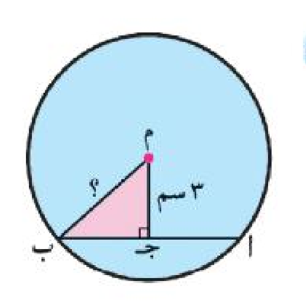


أجب في كراسة الفصل:

① في كل من الأشكال الآتية م دائرة



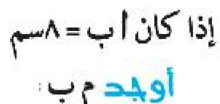


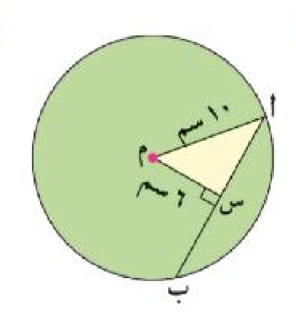


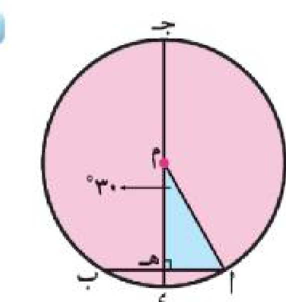
أ) أوجد ق (∠ م أ جـ)

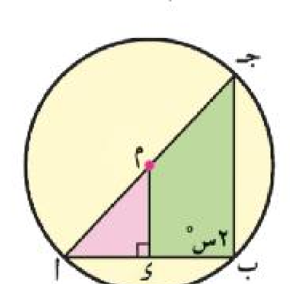
ب) أوجد ق (∠ ء م هـ)

جـ) إذا كان أ ب = ٨سم أوجد م ب

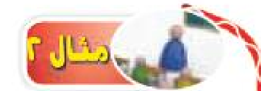




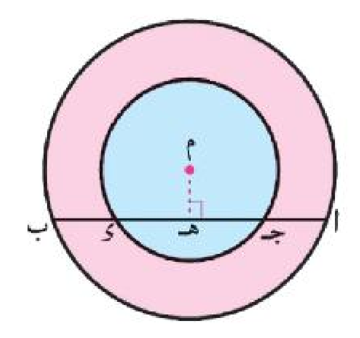
د) أوجد أ ب

هـ) إذا كان أ ب = ١٠سم أوجد جـ ء

و) أوجد قيمة س



في الشكل المقابل: دائرتان متحدتا المركز م، $\overline{أ ب}$ وتر في الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى في جـ، ء. **أثبت أن:** أ جـ = ب ء



الحل

المعطيات: $\overline{أ ب}$ ∩ الدائرة الصغرى = {جـ، ء}

المطلوب: أ جـ = ب ء

العمل: نرسم م هـ ⊥ أب تقطعها فى هـ.

البرهان: فى الدائرة الكبرى م هـ ⊥ أب ∴ هـ أ = هـ ب (١) (نتيجة)

فى الدائرة الصغرى م هـ ⊥ جـ ء ∴ هـ جـ = هـ ء (٢) (نتيجة)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن:

هـ أ - هـ جـ = هـ ب - هـ ء ∴ أ جـ = ب ء (وهو المطلوب)



فى الشكل المقابل: م دائرة، أب // جـ ء ، س منتصف أب رسم س م فقطع جـ ء فى ص. **أثبت أن** ص منتصف جـ ء



المعطيات: أب // جـ ء ، أ س = ب س

المطلوب: جـ ص = ء ص

البرهان: ∵ س منتصف أب

∴ م س ⊥ أب

∵ أب // جـ ء ، س ص قاطع لهما

∴ ق (∠ ء ص س) = ق (∠ أ س ص) = ٩٠° بالتبادل

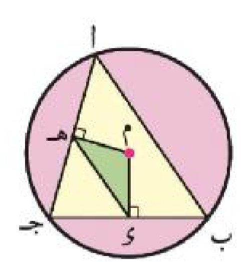
∴ م ص ⊥ جـ ء

∴ ص منتصف جـ ء (وهو المطلوب)

مثال ٤

في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م،

$\overline{م ى} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$



أثبت أن: أولاً: $\overline{هـ ى}$ // $\overline{أ ب}$

ثانيًا: محيط Δ جـ ى هـ = $\frac{١}{٢}$ محيط Δ أ ب جـ

الحل

المعطيات: $\overline{م ى} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$

المطلوب: أولاً: $\overline{هـ ى}$ // $\overline{أ ب}$

ثانيًا: محيط Δ جـ ى هـ = $\frac{١}{٢}$ محيط Δ أ ب جـ

البرهان:

أولاً: ∵ $\overline{م ى} \perp \overline{ب جـ}$ ∴ ى منتصف $\overline{ب جـ}$ (١)

∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$ ∴ هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ (٢)

في Δ أ ب جـ، ى منتصف $\overline{ب جـ}$ ، هـ منتصف $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{ى هـ}$ // $\overline{أ ب}$ (وهو المطلوب أولاً)

، ى هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب (٣)

ثانيًا: من (١)، (٢)، (٣):

∴ محيط Δ جـ ى هـ = جـ ى + جـ هـ + هـ ى = $\frac{١}{٢}$ جـ ب + $\frac{١}{٢}$ أ جـ + $\frac{١}{٢}$ أ ب

= $\frac{١}{٢}$ (جـ ب + أ جـ + أ ب)

= $\frac{١}{٢}$ محيط Δ أ ب جـ

٤ – ٢

أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة



سوف تتعلم

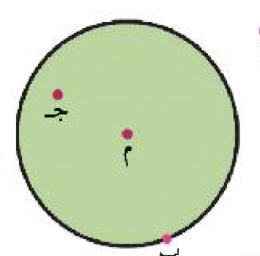
- تحديد وضع نقطة بالنسبة لدائرة .
- تحديد وضع مستقيم بالنسبة لدائرة .
- تحديد علاقة المماس بنصف قطر الدائرة.
- تحديد وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى.
- علاقة خط المركزين بالوتر المشترك والمماس المشترك.

مصطلحات أساسية

- نقطة تقع خارج دائرة
- نقطة تقع على دائرة
- نقطة تقع داخل دائرة
- دائرتان متباعدتان
- دائرتان متقاطعتان
- دائرتان متماستان
- مماس مشترك
- خط المركزين
- وتر مشترك

أولا: وضع نقطة بالنسبة لدائرة.

فكر وناقش

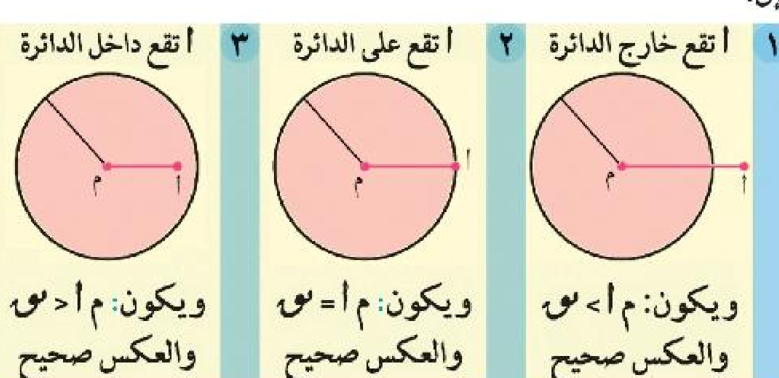


فى الشكل المقابل، الدائرة م تجزئ نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط.

١ كيف تحدد وضع النقاط: أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة م؟

٢ ما العلاقة بين (م أ، نق)، (م ب، نق)، (م جـ، نق)؟

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق، وكانت أ نقطة فى مستوى الدائرة، فإن:



لاحظ الآتي:

إذا كانت م دائرة، طول نصف قطرها = ٤ سم، أ نقطة فى مستواها فإنه:

١ **إذا كان:** م أ = ٤سم، فأين تقع أ من الدائرة م، **مع ذكر السبب**

٢ **إذا كان:** م أ = ٢ $\sqrt{٣}$ سم، فأين تقع أ من الدائرة م، **مع ذكر السبب**

٣ **إذا كان:** م أ = ٣ $\sqrt{٢}$ سم، فأين تقع أ من الدائرة م، **مع ذكر السبب**

٤ **إذا كان:** م أ = صفرًا، فأين تقع أ من الدائرة م، **ماذا نلاحظ؟**





إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، أ نقطة فى مستوى الدائرة، م أ = ٢س - ٣ من السنتيمترات. **أوجد** قيم س عندما تقع أ خارج الدائرة.

الحل

∵ نقطة أ تقع خارج الدائرة م ∴ م أ > ٥ فيكون: ٢س - ٣ > ٥ أى أن: ٢س > ٨ ∴ س > ٤

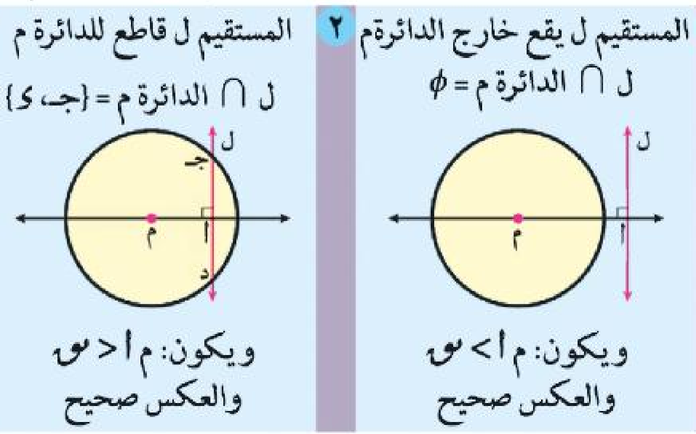


فى المثال السابق، أوجد قيمة س فى الحالات التالية:

١ م أ = ٢س + ١، النقطة أ على الدائرة.
٢ م أ = ٨س - ٢٧، النقطة أ داخل الدائرة.

ثانيًا: وضع مستقيم بالنسبة لدائرة:

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق، ل مستقيم فى مستويها، م أ ⊥ ل حيث م أ ∩ ل = {أ}، فإن:



١ المستقيم ل يقع خارج الدائرة م	٢ المستقيم ل قاطع للدائرة م	٣ المستقيم ل مماس للدائرة م
ل ∩ الدائرة م = φ	ل ∩ الدائرة م = {جـ، ى}	ل ∩ الدائرة = {أ}
ويكون: م أ > نق والعكس صحيح	ويكون: م أ < نق والعكس صحيح	ويكون: م أ = نق والعكس صحيح

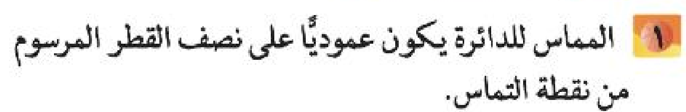


فى كل من الحالات السابقة، أوجد ل ∩ سطح الدائرة م.

لاحظ الآتي:

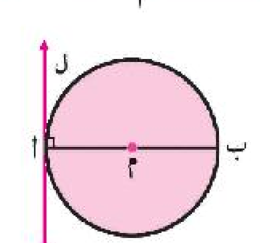
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧سم، م أ ⊥ ل حيث أ ∈ ل؛ فإنه:

١ **إذا كان** م أ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم فاذكر موضع المستقيم ل من الدائرة م
٢ **إذا كان** م أ = ٣ $\sqrt{٧}$ سم فاذكر موضع المستقيم ل من الدائرة م
٣ **إذا كان** ٢ م أ - ٥ = ٩ فاذكر موضع المستقيم ل من الدائرة م
٤ **إذا كان** المستقيم ل يقطع الدائرة م، م أ = ٣س - ٥ فما قيمة س؟
٥ إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة م، م أ = س^{٢} - ٢ فما قيمة س؟



حقائق هامة

١ المماس للدائرة يكون عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

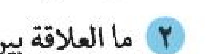


٢ المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماسًا للدائرة.



١ كم مماسًا يمكن رسمه للدائرة م؟

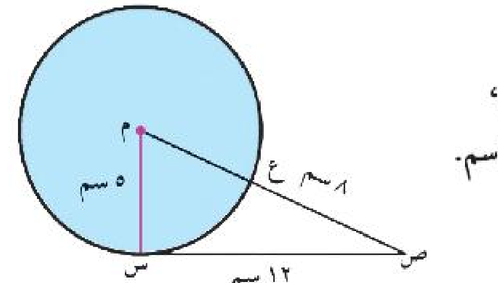
أولاً: من نقطة على الدائرة. ثانيًا: من نقطة خارج الدائرة.



٢ ما العلاقة بين المماسين المرسومين للدائرة من نهايتى أى قطر فيها؟



مثال ٢



فى الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ٥سم،

س ص = ١٢سم، $\overline{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع}، ع ص = ٨سم.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة م عند س.

الحل

∵ $\overline{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع} ∴ م ص = م ع + ع ص

∵ م ع = م س = ٥سم (أنصاف أقطار) ∴ م ص = ٥ + ٨ = ١٣سم

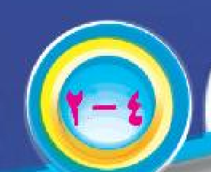
∵ (م ص)^{٢} = (١٣)^{٢} = ١٦٩ ، (م س)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥ ، (س ص)^{٢} = (١٢)^{٢} = ١٤٤

∴ (م س)^{٢} + (س ص)^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩ = (م ص)^{٢}

∴ ق(∠ م س ص) = ٩٠° (عكس نظرية فيثاغورث)

∵ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{م س}}$

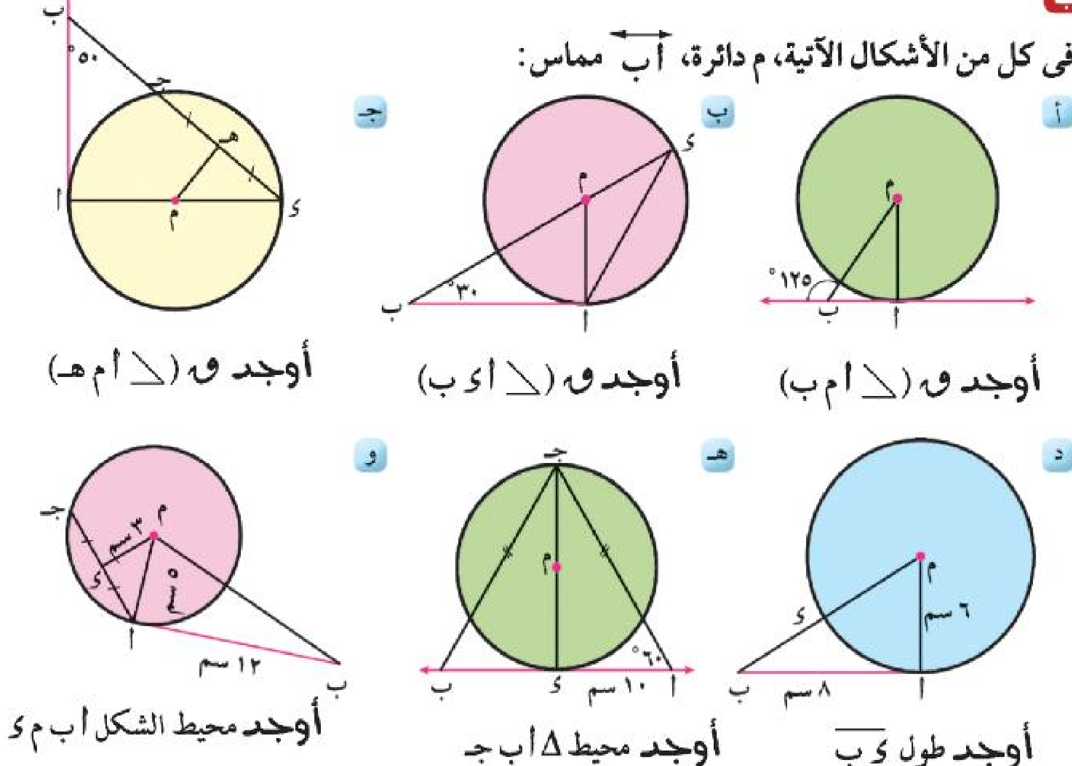
∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند س **(وهو المطلوب)**



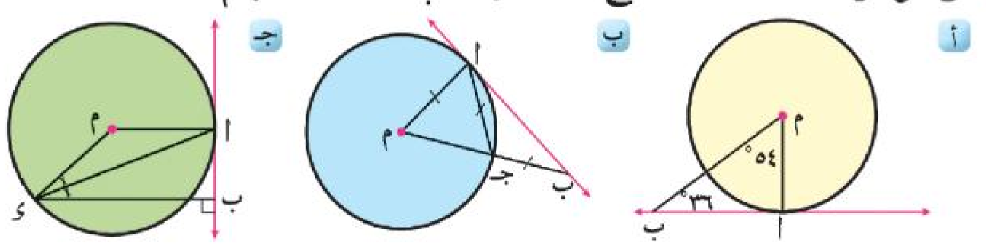


أجب عن السؤالين التاليين في كراسة الفصل:

١ فى كل من الأشكال الآتية، م دائرة، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس:

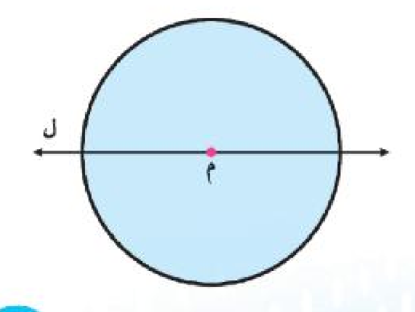


٢ فى كل من الأشكال الآتية وضح لماذا يكون $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة م:



ثالثًا : وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى





١ ارسم دائرة مركزها م بطول نصف قطر مناسب = نق، سم.

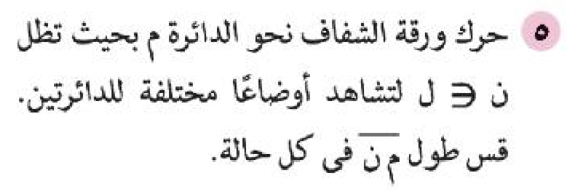
٢ ارسم أحد محاور تماثل الدائرة م وليكن المستقيم ل كما فى الشكل المقابل.

٣ على ورقة شفافة،
ارسم دائرة مركزها ن بطول نصف قطر مناسب = نق$_2$ سم حيث نق$_2$ < نق$_1$.

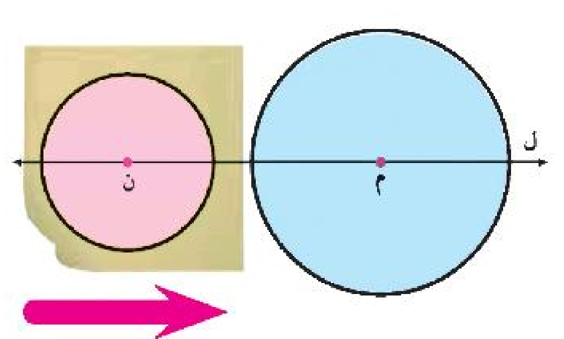


٤ ضع الورقة الشفافة بحيث تنتمي النقطة ن إلى المستقيم ل .

لاحظ أن المستقيم ل = $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ويسمى $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين للدائرتين م، ن وهو محور تماثل لهما.



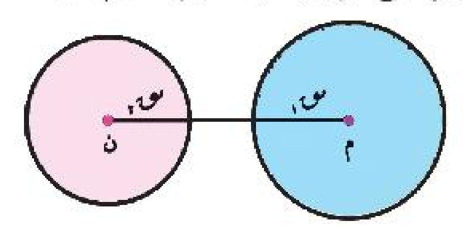
٥ حرك ورقة الشفاف نحو الدائرة م بحيث تظل ن ∈ ل لتشاهد أوضاعًا مختلفة للدائرتين.
قس طول $\overline{\text{م ن}}$ في كل حالة.
ما العلاقة بين طول $\overline{\text{م ن}}$ **(البعد بين مركزي الدائرتين م، ن)**، نق$_1$ + نق$_2$ أو نق$_1$ - نق$_2$ في كل وضع.



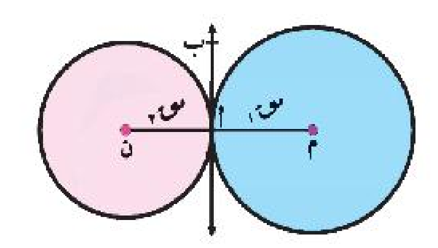
لاحظ الآتي :

إذا كان م، ن دائرتين في المستوى، طولا نصفي قطريهما نق$_1$، نق$_2$ على الترتيب حيث نق$_1$ > نق$_2$ فإنه:

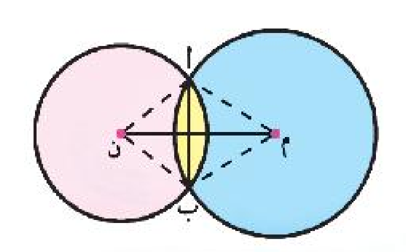
١ إذا كان: م ن > نق$_1$ + نق$_2$، فإن م ∩ ن = ϕ ،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ
وتكون الدائرتان متباعدتين.



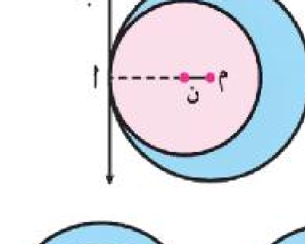
٢ إذا كان: م ن = نق$_1$ + نق$_2$، فإن م ∩ ن = { أ } ،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }
وتكون الدائرتان متماستين من الخارج.



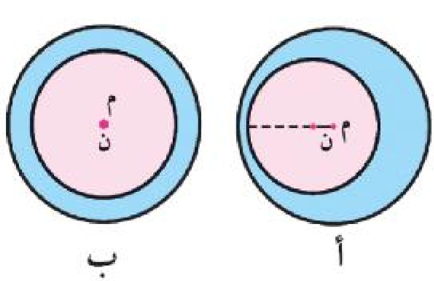
٣ إذا كان: نق$_1$ - نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$،
فإن م ∩ ن = { أ ، ب }
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح المنطقة الصفراء
وتكون الدائرتان متقاطعتين.







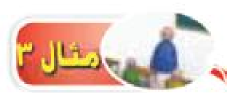
٤ إذا كان: م ن = $نق_١ - نق_٢$، فإن م ∩ ن = { أ } ،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن
وتكون الدائرتان متماستين من الداخل.



٥ إذا كان: م ن < $نق_١ - نق_٢$، فإن م ∩ ن = φ ،
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن
وتكون الدائرتان متداخلتين كما في شكل أ
وعندما م ن = صفر، تكون الدائرتان متحدتي المركز.
كما في شكل ب



١ خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس و يكون عموديًّا على المماس المشترك عند هذه النقطة.
٢ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك و ينصفه.



دائرتان م، ن طولا نصفى قطريهما ٩سم، ٤سم على الترتيب، بين وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى الحالات الآتية:

أ م ن = ١٣سم　　ب م ن = ٥سم　　جـ م ن = ٣سم
د م ن = صفر　　هـ م ن = ١٠سم　　و م ن = ١٥سم

الحل

∵ $نق_١ = ٩$سم، $نق_٢ = ٤$سم　∴ $نق_١ + نق_٢ = ١٣$سم، $نق_١ - نق_٢ = ٥$سم

أ م ن = ١٣سم　∴ م ن = $نق_١ + نق_٢$　∴ الدائرتان متماستان من الخارج.

ب م ن = ٥سم　∴ م ن = $نق_١ - نق_٢$　∴ الدائرتان متماستان من الداخل.

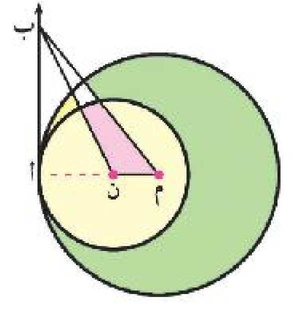
جـ م ن = ٣سم　∴ م ن < $نق_١ - نق_٢$، م ن ≠ ٠　∴ الدائرة ن تقع داخل الدائرة م.

د م ن = صفر　∴ الدائرتان متحدتا المركز.

هـ م ن = ١٠سم　∴ $نق_١ - نق_٢$ < م ن < $نق_١ + نق_٢$　∴ الدائرتان متقاطعتان.

و م ن = ١٥سم　∴ م ن > $نق_١ + نق_٢$　∴ الدائرتان متباعدتان.

مثال ٤



م، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠سم، ٦سم على الترتيب ومتماستان من الداخل فى أ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك لهما عند أ. إذا كانت مساحة المثلث ب م ن = ٢٤سم^٢، **أوجد** طول $\overline{أب}$.

الحل

∵ الدائرتان متماستان من الداخل عند أ ∴ أ ∈ $\overleftrightarrow{م ن}$ ، $\overleftrightarrow{م ن}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$

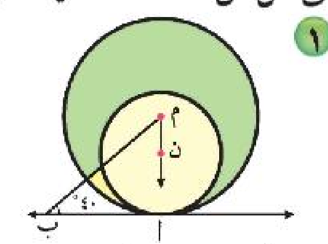
فيكون طول $\overline{أب}$ ارتفاعًا للمثلث ب م ن الذى قاعدته $\overline{م ن}$ حيث: م ن = ١٠ - ٦ = ٤ سم (لماذا؟)

مساحة Δ ب م ن = $\frac{١}{٢}$ × م ن × أ ب ∴ ٢٤ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × أ ب ∴ أ ب = ١٢ سم

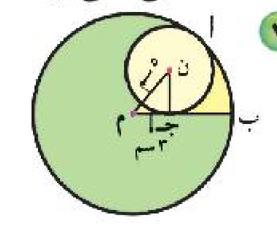


تدرب أجب عن الآتي في كراسة الفصل:

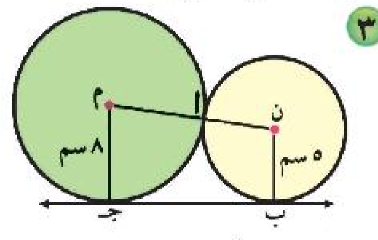
فى كل من الأشكال الآتية الدوائر متماسة مَثْنَى مَثْنَى، باستخدام معلومات كل شكل



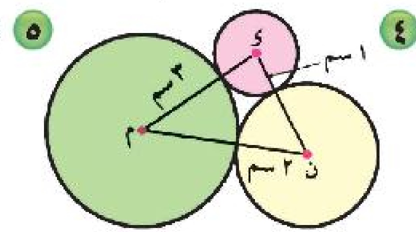
أوجد ق (∠ ب م ن)



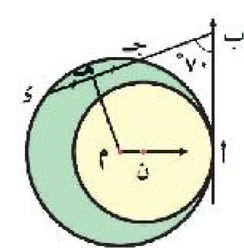
أوجد طول $\overline{ب جـ}$



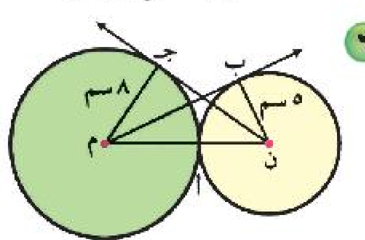
أوجد طول $\overline{ب جـ}$



أوجد ق (∠ م ى ن)

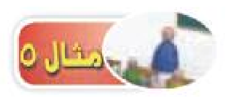


أوجد ق (∠ هـ م ن)



أوجد طولى كل من $\overline{م ب}$ ، $\overline{ن جـ}$

مثال ٥



م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب، $\overline{جـ ى}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftrightarrow{جـ س}$ مماس للدائرة م عند جـ، $\overrightarrow{جـ س}$ ∩ $\overrightarrow{ب أ}$ = {هـ}، $\overleftrightarrow{م ن}$ ∩ $\overline{أ ب}$ = {و}. **أثبت أن:** ق (∠ ى م ن) = ق (∠ جـ هـ ب).



الحل

المعطيات: الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ، ب}، $\overline{جـ ى}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftarrow{جـ س}$ مماس للدائرة م.

المطلوب: إثبات أن ق (∠ ى م ن) = ق (∠ جـ هـ ب).

البرهان: ∵ خط المركزين عمودى على الوتر المشترك.

∴ $\overleftrightarrow{م ن}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ أى ق (∠ أ و م) = ٩٠°

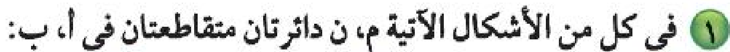
∵ $\overline{جـ ى}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftarrow{جـ س}$ مماس عند جـ

∴ $\overleftarrow{جـ س}$ ⊥ $\overline{جـ ى}$ أى ق (∠ هـ جـ ى) = ٩٠°

∴ ق (∠ جـ هـ و) + ق (∠ جـ م و) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠°) = ١٨٠° **(لماذا؟)**

∵ ق (∠ ى م و) + ق (∠ جـ م و) = ١٨٠°

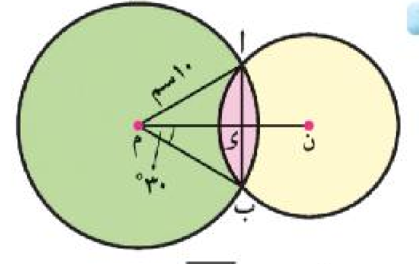
∴ ق (∠ ى م ن) = ق (∠ جـ هـ و) **وهو المطلوب**



تدرب **أجب عن السؤالين التاليين في كراسة الفصل:**

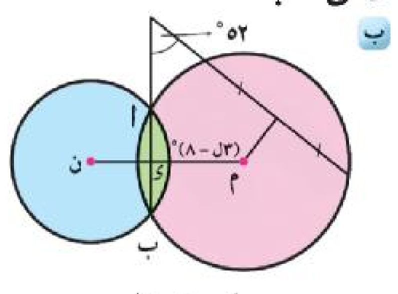
١ فى كل من الأشكال الآتية م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب:

أ



أوجد طول $\overline{أ ب}$

ب



اوجد قيمة ل

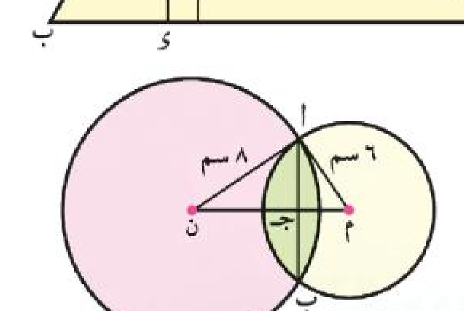
لاحظ أن:

فى المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى أ إذا رسم $\overline{أ ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ فإن:

(أ ب)^2 = ب ى × ب جـ **(نظرية إقليدس)**

، (أ ى)^2 = ى ب × ى جـ **(نتيجة)**

، أ ى × ب جـ = أ ب × أ جـ **لماذا؟**



٢ فى الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب

$\overline{م ن}$ ∩ $\overline{أ ب}$ = {جـ}، أ م = ٦ سم، أ ن = ٨ سم،

$\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أ ن}$.

أوجد طول $\overline{أ ب}$

٤ - ٣

تعيين الدائرة

- ☆ كيفية رسم دائرة تمر بنقطة معلومة.
- ☆ كيفية رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين.
- ☆ كيفية رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة.



مصطلحات أساسية

- ☆ دائرة خارجة لمثلث.

فكر وناقش

- لماذا يستخدم الفرجار في رسم الدائرة؟
- ما محور القطعة المستقيمة.
- هل مركز الدائرة يقع على محور أي وتر فيها؟
- كيف يمكنك رسم (تعيين) دائرة في المستوى؟



يمكن رسم (تعيين) دائرة بشروط معطاة، مهما اختلفت، إذا علم:

١ مركز الدائرة. ٢ طول نصف قطر الدائرة.

أولاً: رسم دائرة تمر بنقطة معلومة:

المعطيات: أ نقطة معلومة في المستوى.

المطلوب: رسم دائرة تمر بالنقطة أ.

الانشاء:

١ خذ أي نقطة اختيارية مثل م في نفس المستوى.

٢ ضع سن الفرجار عند م وبفتحة تعادل م أ، ارسم الدائرة م، نجد أن الدائرة م تمر بالنقطة أ.

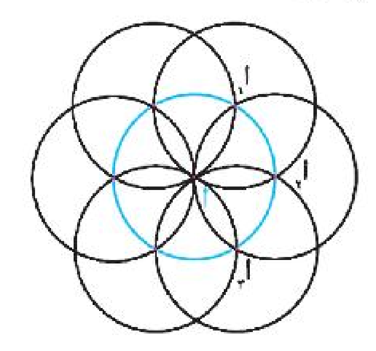
٣ ضع سن الفرجار عند نقطة أخرى م١ ، وبفتحة تعادل م١ أ ارسم الدائرة م١، نجد أن الدائرة م١ تمر بالنقطة أ.

٤ كرر العمل السابق

لاحظ أن: لكل نقطة من اختيارك (مركز الدائرة) أمكن رسم دائرة تمر بالنقطة أ.

✍ كم عدد نقاط المستوى؟ كم عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بالنقطة أ؟

✍ إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية فى الطول، أين تقع مراكزها؟



مما سبق نستنتج أن:

1. يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة مثل أ.
2. إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية فى الطول، فإن مراكزها تقع على دائرة مطابقة لهم ومركزها النقطة أ.

ثانيًا: رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين:

المعطيات: أ، ب نقطتان معلومتان فى المستوى.

المطلوب: رسم دائرة م تمر بالنقطتين أ، ب أى أن $\overline{\text{أب}}$ وتر فى الدائرة م.

الإنشاء:

1. ارسم القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$.
2. ارسم المستقيم ل محور $\overline{\text{أب}}$ حيث ل ∩ $\overline{\text{أب}}$ = {و}
(مركز الدائرة يقع على محور الوتر $\overline{\text{أب}}$).
3. خذ أى نقطة اختيارية م حيث م ∈ ل، اركز بسن الفرجار فى م وبفتحه تعادل م أ ارسم الدائرة م تجدها تمر بالنقطة ب.
4. ضع سن الفرجار فى نقطة أخرى مثل $م_1$ حيث $م_1$ ∈ ل، وبفتحة تعادل $م_1$أ ارسم الدائرة $م_1$ حيث تمر بالنقطة ب.
5. كرر العمل السابق ولاحظ:

لكل نقطة من اختيارك (مركز الدائرة) أمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين أ، ب

✍ كم عدد نقاط المستقيم ل؟ كم عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بالنقطتين أ، ب؟

✍ ما طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين أ، ب؟

✍ هل يمكن أن تتقاطع دائرتان فى أكثر من نقطتين؟

مما سبق نستنتج أن:

1. يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطتين معلومتين مثل أ، ب.
2. طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لكي تمر بالنقطتين أ، ب يكون مساويًا $\frac{1}{2}$ أ ب.
3. لا يمكن أن تتقاطع دائرتان فى أكثر من نقطتين.

ثالثًا: رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة:

المعطيات: أ، ب، جـ ثلاث نقاط معلومة فى المستوى.

المطلوب: رسم دائرة م تمر بالنقاط الثلاث أ، ب، جـ.

الإنشاء:

1. ارسم المستقيم $ل_1$ محور $\overline{أب}$ فيكون م $\in$ $ل_1$.
2. ارسم المستقيم $ل_2$ محور ب جـ فيكون م $\in$ $ل_2$.
3. إذا كان $ل_1 \cap ل_2 = \{م\}$، ضع سن الفرجار فى النقطة م وبفتحة تعادل م أ، ارسم الدائرة م تجدها تمر بالنقطتين ب، جـ.
4. إذا كان $ل_1 \cap ل_2 = \phi$؛ فهل يمكنك تعيين موضع النقطة م؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن:

إذا كان أ، ب، جـ على استقامة واحدة فإن $ل_1 // ل_2$، $ل_1 \cap ل_2 = \phi$

ولا يمكن رسم دائرة تمر بالنقاط الثلاث أ، ب، جـ.



مما سبق نستنتج أن:

أى ثلاث نقاط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها دائرة وحيدة

نتائج



نتيجة (1) الدائرة التى تمر برؤوس مثلث تسمى دائرة خارجة للمثلث.

كما يقال إن المثلث مرسوم داخل دائرة إذا وقعت رؤوسه على الدائرة.



نتيجة (2) الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث.



علاقة أوتار الدائرة بمركزها



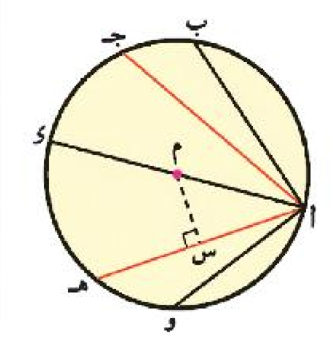
سوف تتعلم

- استنتاج العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها.
- كيفية حل مسائل على العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها

مصطلحات أساسية

- أوتار متساوية
- دوائر متطابقة

فكر وناقش



فى الشكل المقابل:

أ نقطة على الدائرة م، رسمت فيها الأوتار أب ، أجـ، أء ، أهـ، أو.

١ ما العلاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة؟

٢ إذا تساوت الأوتار فى الطول، ماذا تستنتج؟

٣ إذا تساوت أبعاد الأوتار عن مركز الدائرة ماذا تتوقع؟

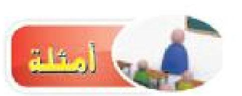
لاحظ أن:

بُعدُ الوتر أهـ عن مركز الدائرة م = م س حيث س منتصف الوتر أهـ، فى الدائرة م التى طول نصف قطرها نق.

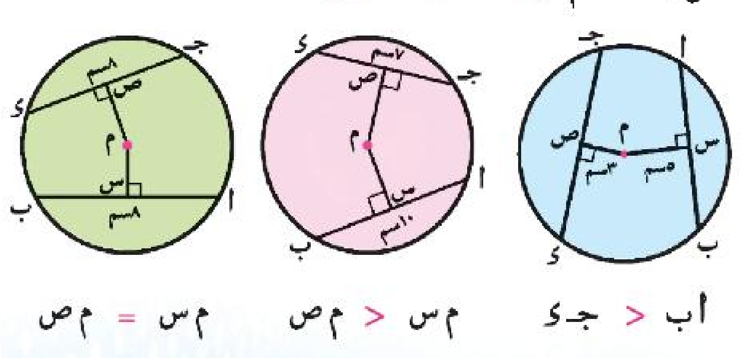
فيكون: $(م س)^2 + (أ س)^2 = (أ م)^2 = نق^2$ (مقدار ثابت)

أى أن:

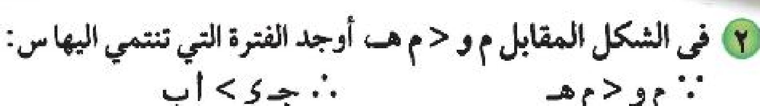
كلما اقترب الوتر من مركز الدائرة زاد طوله والعكس صحيح



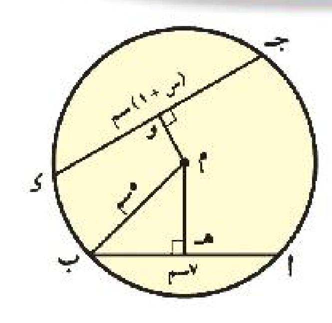
١ أكمل باستخدام (> أ، < أ، =):



أب > جـء　　　م س > م ص　　　م س = م ص



٢ فى الشكل المقابل م و < م هـ، أوجد الفترة التي تنتمي اليها س:



∵ م و < م هـ ∴ جـ ى > أ ب

∴ س + ١ > ٧ س > ٦

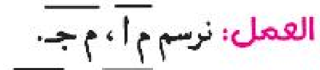
∵ جـ ى وتر فى الدائرة م ∴ جـ ى ⩽ ١٠

∴ س ⩽ ٩ ويكون ٦ < س ⩽ ٩

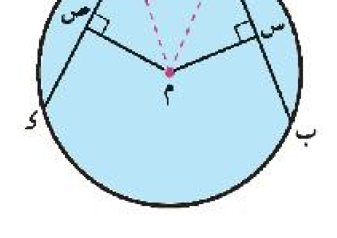
أى أن: س ∈] ٦، ٩]

نظرية

الأوتار المتساوية الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركزها.



المعطيات: أ ب = جـ ى، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ ى}}$.



المطلوب: إثبات أن م س = م ص.

العمل: نرسم $\overline{\text{م أ}}$، $\overline{\text{م جـ}}$.

البرهان: ∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ س = $\frac{1}{2}$ أ ب.

∵ $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ ى}}$ ∴ جـ ص = $\frac{1}{2}$ جـ ى.

∵ أ ب = جـ ى ∴ أ س = جـ ص.

∵ المثلثين أ س م، جـ ص م، فيهما:

أ م = جـ م
ق (∠ أ س م) = ق (∠ جـ ص م) = ٩٠°
أ س = جـ ص (برهاناً)

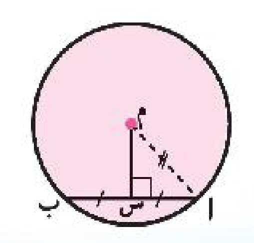
∴ Δ أ س م ≡ Δ جـ ص م وينتج أن: م س = م ص (وهو المطلوب)

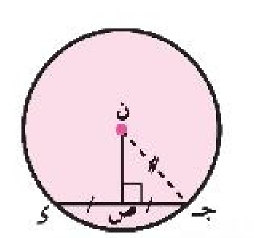


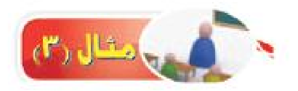
نتيجة الأوتار المتساوية الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من مراكزها

فى الشكل المقابل:

الدائرتان م، ن متطابقتان، أ ب = جـ ى، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{جـ ى}}$، فإن: م س = ن ص.







ادرس الشكل ثم أوجد المطلوب:

أ إذا كان:

أ ب = جـ ى

اثبت أن: هـ س = و ص

الحل

∵ م س = م ص (١)

∵ م هـ = م و (٢) بطرح معادلة (١) من (٢)

∴ هـ س = و ص

ب إذا كان:

أ ب = جـ ى

فأوجد كل من:

قيمة س، طول جـ ى

الحل

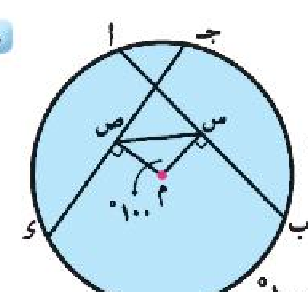
∵ م هـ = م و

∴ س + ٢ = ٦

∴ س = ٤ سم ،

جـ ى = ٣ س + ٤ = ٣ × ٤ + ٤ = ١٦ سم

جـ إذا كان:



أ ب = جـ ى

فأوجد: ق (∠ م س ص)

الحل: م س = م ص

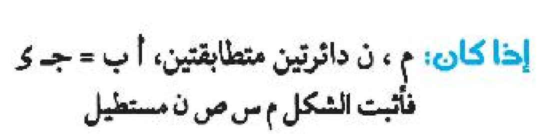
فى Δ م س ص

∵ ق (∠ س م ص) = ١٠٠°

∴ ق (∠ م س ص) + ق (∠ م ص س) = ٨٠°

∴ ق (∠ م س ص) = ٨٠ ÷ ٢ = ٤٠°

د



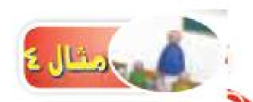
إذا كان: م ، ن دائرتين متطابقتين، أ ب = جـ ى

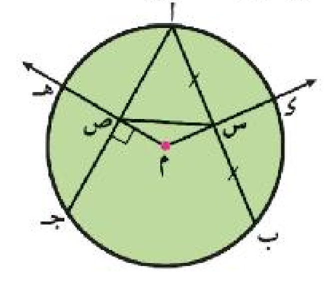
فأثبت الشكل م س ص ن مستطيل

الحل: م س // ن ص ، م س ⊥ أ ب

، م س = ن ص

∴ الشكل م س ص ن مستطيل





أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م، س منتصف أ ب ، م س يقطع الدائرة فى ى، م ص ⊥ أ جـ يقطعه فى ص و يقطع الدائرة فى هـ.

أثبت أن: أولاً: س ى = ص هـ.

ثانيًا: ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص جـ)

المعطيات: أ ب = أ جـ، س منتصف أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

المطلوب: إثبات أن:

أولاً: س ى = ص هـ

ثانيًا: ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص جـ)

البرهان: ∵ س منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$.

∵ أب = أجـ ، $\overleftarrow{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أجـ}}$ ∴ م س = م ص ، ∵ م ى = م هـ = نق

∴ م ى - م س = م هـ - م ص ∴ س ى = ص هـ **(المطلوب أولاً)**

فى Δ م س ص: ∵ م س = م ص ∴ ق (∠ ص س م) = ق (∠ س ص م) (١)

∵ $\overleftarrow{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أجـ}}$ ∴ ق (∠ م س ب) = ق (∠ م ص جـ) = ٩٠° (٢)

من (١) و (٢) ينتج أن: ق (∠ ص س ب) = ق (∠ س ص جـ) **(وهو المطلوب ثانيًا)**

عكس النظرية

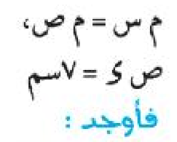
فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول.



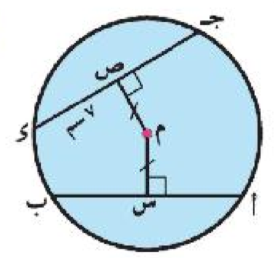
أجب عن الآتى في كراسة الفصل:

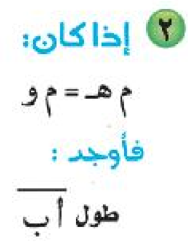
ادرس الشكل ثم أكمل:



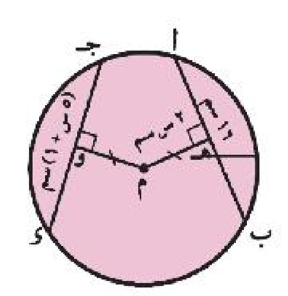


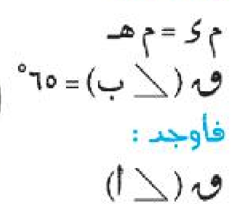
١ إذا كان:
م س = م ص ،
ص ى = ٧سم
فأوجد :
طول $\overline{\text{أب}}$



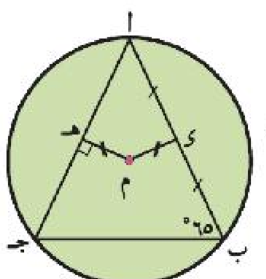


٢ إذا كان:
م هـ = م و
فأوجد :
طول $\overline{\text{أب}}$

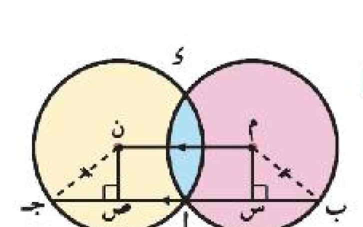


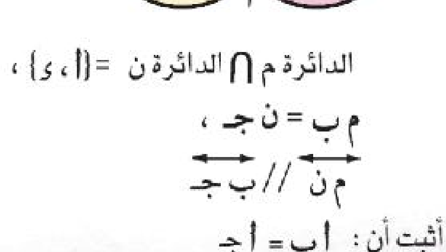


٣ إذا كان:
م ى = م هـ
ق (∠ ب) = ٦٥°
فأوجد :
ق (∠ أ)



٤





الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ى} ،
م ب = ن جـ ،
$\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

أثبت أن: أب = أجـ

أمثلة

٥ دائرتان متحدتا المركز م، رسم $\overline{أب}$ وترًا فى الدائرة الكبرى فقطع الدائرة الصغرى فى جـ، ى، ورسم $\overline{أهـ}$ وترًا فى الدائرة الكبرى أيضًا فقطع الدائرة الصغرى فى ع، ل.
إذا كان ق ($\measuredangle$ أ ب هـ) = ق ($\measuredangle$ أ هـ ب)، **فأثبت أن:** جـ ى = ع ل.

الحل

المعطيات: ق ($\measuredangle$ أ ب هـ) = ق ($\measuredangle$ أ هـ ب)

المطلوب: إثبات أن جـ ى = ع ل

العمل: نرسم $\overline{م س} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{أهـ}$

البرهان: فى Δ أ ب جـ: $\because$ ق ($\measuredangle$ أ ب هـ) = ق ($\measuredangle$ أ هـ ب) $\therefore$ أ ب = أ هـ.

فى الدائرة الكبرى: $\because$ أ ب = أ هـ (برهانًا) $\therefore$ م س = م ص (نظرية)

فى الدائرة الصغرى: $\because$ م س = م ص (برهانًا)

$\therefore$ جـ ى = ع ل (عكس النظرية) (وهو المطلوب)

٦ فى الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب،
$\overleftrightarrow{م ن} \cap \overleftrightarrow{أ ب}$ = {ى}، س منتصف $\overline{ب جـ}$، $\overline{ن ص} \perp \overline{هـ و}$ ،
م س = م ى، ن ص = ن ى. **أثبت أن:** ب جـ = هـ و.

الحل

المعطيات: س منتصف $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ن ص} \perp \overline{هـ و}$ ، م س = م ى، ن ص = ن ى.

المطلوب: إثبات أن: ب جـ = هـ و

البرهان: $\because$ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط المركزين، $\overline{أب}$ وتر مشترك للدائرتين م، ن. $\therefore$ $\overline{م ن} \perp \overline{أب}$

فى الدائرة م: $\because$ س منتصف $\overline{ب جـ}$ $\therefore$ $\overline{م س} \perp \overline{ب جـ}$

$\because$ $\overline{م س} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{م ى} \perp \overline{أب}$ ، م س = م ى

$\therefore$ ب جـ = أ ب (عكس النظرية) (١)

فى الدائرة ن: $\because$ $\overline{ن ص} \perp \overline{هـ و}$ ، $\overline{ن ى} \perp \overline{أب}$ ، ن ص = ن ى

$\therefore$ هـ و = أ ب (عكس النظرية) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: ب جـ = هـ و (وهو المطلوب)

فكر إذا كانت م، ن دائرتين متطابقتين ومتقاطعتين فى أ، ب؛ فهل $\overleftrightarrow{أب}$ محور $\overline{م ن}$ ؟
فسر إجابتك.


الهندسة
الوحدة الخامسة: الزوايا والأقواس فى الدائرة

٥ - ١

الزاوية المركزية وقياس الأقواس



سوف تتعلم

- ☆ مفهوم طول القوس
- ☆ مفهوم قياس القوس
- ☆ كيفية إيجاد العلاقة بين أوتار في الدائرة وأقواسها

مصطلحات أساسية

- ☆ زاوية مركزية.
- ☆ زاوية محيطية.
- ☆ قوس.
- ☆ قوسان متجاوران.
- ☆ قياس قوس.
- ☆ وتر.
- ☆ مماس.

فكر وناقش

فى الشكلِ المقابل:

ضلعا ∠ ا م ب يقسمان الدائرة م إلى قوسين :

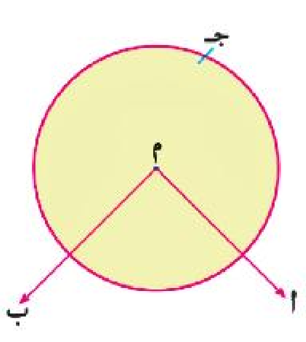
١) القوسُ الأصغر ا ب، ويرمز له بالرمز ⌒ا ب.

٢) القوسُ الأكبرُ ا جـ ب، ويرمز له بالرمز ⌒ا جـ ب.

- ♦ ما موقعُ نقط ⌒ا ب بالنسبة إلى ∠ ا م ب؟
- ♦ ما موقعُ نقط ⌒ا جـ ب بالنسبة إلى ∠ ا م ب المنعكسة؟
- ♦ إذا كانت ∠ ا م ب زاوية مستقيمة **ماذا تلاحظ ؟**

الزاوية المركزية	هى الزاويةُ التى رأسها مركزُ الدائرة، ويحملُ كلٌّ من ضلعيها نصفَ قطر فى الدائرة.

فى الشكلِ المقابلِ لاحظ أن:



١) ∠ ا م ب المركزية يقابلها ⌒ا ب، ⌒ا جـ ب يقابل ∠ ا م ب المركزية المنعكسة .

٢) إذا كانت ∠ ا م ب زاوية مستقيمة (ا̅ ب̅ قطر فى الدائرة م) فإن ⌒ا ب يطابق ⌒ا جـ ب ويسمى كل منهما "نصف دائرة"

قياسُ القوس	هو قياسُ الزاوية المركزية المقابلة له.

فى الشكلِ المقابلِ :

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م، $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$ ، ق (∠ أ م ى) = ٦٠°

لاحظ أن :

١ ق ($\overset{\frown}{أى}$) = ق (∠ أ م ى) = ٦٠°

٢ ق ($\overset{\frown}{جـب}$) = ق (∠ جـ م ب) = ٩٠°

٣ ق ($\overset{\frown}{ىجـ}$) = ق (∠ ى م جـ) = ٣٠° (لماذا)

٤ ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق (∠ أ م ب) = ١٨٠°

أى أن قياس نصف الدائرة = ١٨٠° **ويكون** قياس الدائرة = ٣٦٠°

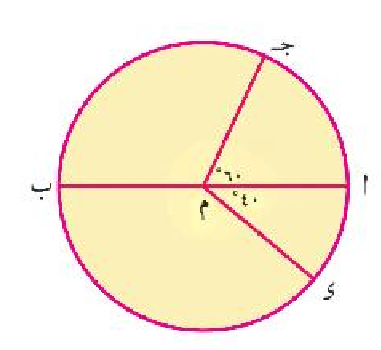
القوسان المتجاوران هما قوسان من دائرةٍ يشتركان فى نقطةٍ واحدةٍ فقط.

مثل $\overset{\frown}{أب}$، $\overset{\frown}{بجـ}$ بالشكل المقابل:

ويكون :

ق ($\overset{\frown}{أب}$) + ق ($\overset{\frown}{بجـ}$) = ق ($\overset{\frown}{أبجـ}$)

، ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\overset{\frown}{أبجـ}$) - ق ($\overset{\frown}{بجـ}$)



فى الشكلِ المقابل:

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م، ق (∠ أ م جـ) = ٦٠°، ق (∠ أ م ى) = ٤٠°.

لاحظ أن :

١ ق ($\overset{\frown}{أى}$) = ٤٠°، ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) =

٢ ق ($\overset{\frown}{جـأى}$) = ق ($\overset{\frown}{جـأ}$) + ق ($\overset{\frown}{أ}$)

= ٦٠° + ٤٠° = ١٠٠°

٣ ق ($\overset{\frown}{بجـ}$) = ق ($\overset{\frown}{أجـب}$) - ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠° (لماذا؟)

٤ ق ($\overset{\frown}{ىجـب}$) = قياس الدائرة - ق ($\overset{\frown}{ىب}$) = ٣٦٠° - ١٤٠° = ٢٢٠°

مثال (١)

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م، ق (∠ جـ م ى) = ٧٠°،

ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) : ق ($\overset{\frown}{ىب}$) = ٥ : ٦ أوجد ق ($\overset{\frown}{أجـى}$).

الحل

بفرض أن ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٥س ∴ ق ($\overset{\frown}{ىب}$) = ٦س

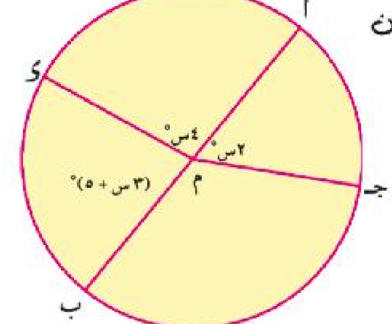
∵ ق ($\overset{\frown}{أىب}$) = ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{جـى}$) + ق ($\overset{\frown}{ىب}$) = ١٨٠°

∴ ٥س + ٧٠ + ٦س = ١٨٠ ١١س = ١١٠ ∴ س = ١٠° ، ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٥٠°

∴ ق ($\overset{\frown}{أجـى}$) = ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{جـى}$) = ٥٠° + ٧٠° = ١٢٠°



فى الشكلِ المقابلِ: $\overline{أب}$ قطرٌ فى الدائرةِ م ، ادرس الشكلَ ثم لاحظ ان



١ س = ٢٥°
٢ ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٥٠°
٣ ق ($\overset{\frown}{أى}$) = ١٠٠°
٤ ق ($\overset{\frown}{بجـ}$) = ١٣٠°
٥ ق ($\overset{\frown}{جـأى}$) = ١٥٠°
٦ ق ($\overset{\frown}{جـبى}$) = ٢١٠°
٧ ق ($\overset{\frown}{أجـى}$) = ٢٦٠°
٨ ق ($\overset{\frown}{أىجـ}$) = ٣١٠°

طولُ القوسِ: هو جزءٌ من محيطِ دائرته يتناسبُ مع قياسه حيث:

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيطُ الدائرةِ .

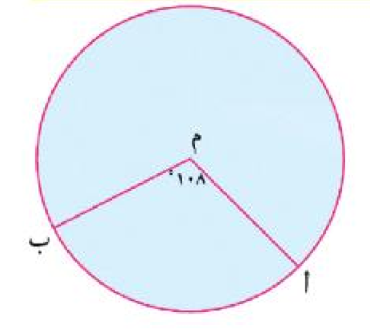


مثال (٢)

فى الشكلِ المقابِل:

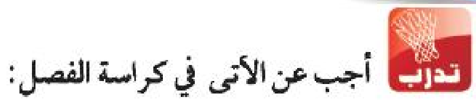
م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ١٠٨°.

أوجد طول $\overset{\frown}{أب}$ (π = ٣,١٤)

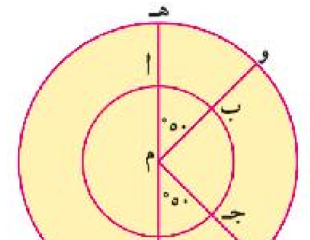


الحل

طولُ القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيطُ الدائرة . = $\frac{١٠٨}{٣٦٠}$ × ٢ × ٣,١٤ × ٥ = ٩,٤٢سم.

تدرب 

أجب عن الآتى في كراسة الفصل:



فى الشكلِ المقابلِ: دائرتان متحدتا المركز طول نصف قطر الدائرة الصغرى ٧سم وطول نصف قطر الدائرة الكبرى ١٤سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

أثبت أن: (⌒أ ب) ≡ (⌒جـ ى) ، ⌒هـ و ≡ ⌒س ص

الحل:

فى الدائرة الصغرى:

ق(⌒أ ب) = ق(⌒جـ ى) = ٥٠°

طول ⌒أ ب = $\frac{٥٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = \frac{٥٥}{٩}$ سم

طول ⌒جـ ى = $\frac{٥٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = \frac{٥٥}{٩}$ سم ∴ ⌒أ ب **يطابق** ⌒جـ ى

فى الدائرة الكبرى:

ق(⌒هـ و) = ق(⌒س ص) = ٥٠° ، طول ⌒هـ و = $\frac{٥٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ = \frac{١١٠}{٩}$ سم

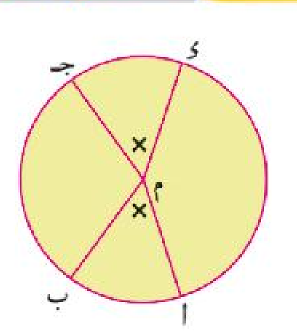
طول ⌒س ص = $\frac{٥٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ = \frac{١١٠}{٩}$ سم ∴ ⌒هـ و **يطابق** ⌒س ص

- هل ⌒أ ب يطابق ⌒هـ و؟ ماذا تستنتج؟

نتائج هامة:

نتيجة (١) فى الدائرةِ الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) ، الأقواسُ المتساويةُ فى القياسِ متساويةُ فى الطولِ، والعكسُ صحيحٌ.

فى الدائرة م



إذا كان: ق(⌒أ ب) = ق(⌒جـ ى)

فإن: طول ⌒أ ب = طول ⌒جـ ى

والعكس

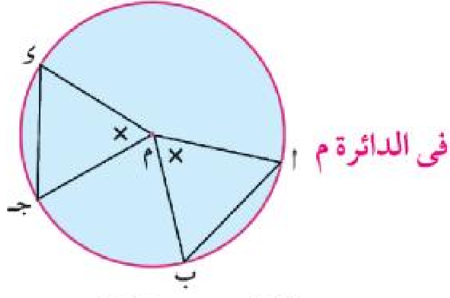
إذا كان: طول ⌒أ ب = طول ⌒جـ ى

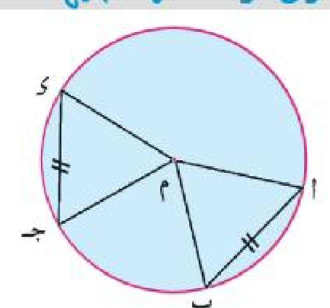
فإن: ق(⌒أ ب) = ق(⌒جـ ى)





نتيجة (٢) فى الدائرةِ الواحدةِ (أو الدوائر المتطابقة) ، الأقواسُ المتساويةُ فى القياسِ أوتارها متساوية فى الطول، والعكس صحيح





إذا كان: ق (أب⌒) = ق (جـ ى⌒)

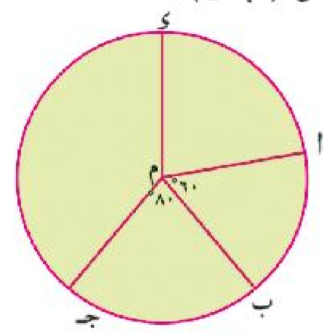
فإن: طول أب = طول جـ ى

إذا كان : أب = جـ ى

فإن: ق (أب⌒) = ق (جـ ى⌒)



أجب فى كراسة الفصل



فى الشكلِ المقابلِ إذا كان :

ق (أب⌒) = ٦٠° ، ق (ب جـ⌒) = ٨٠° ،

ق (أ ى⌒) : ق (ى جـ⌒) = ٤ : ٧

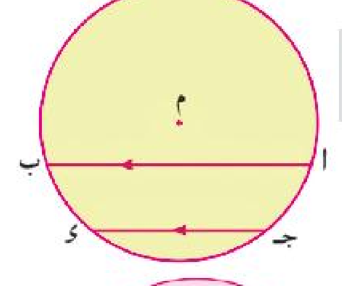
١ اذكر الأقواسَ المتساويةَ فى القياسِ.

٢ اذكر الأقواسَ المتساوية فى الطول.

٣ ارسم الأوتارَ المتساويةَ فى الطول.



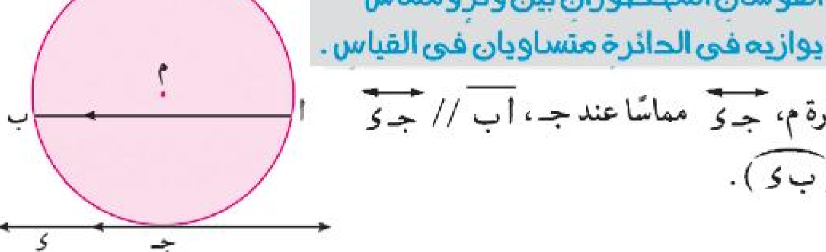
نتيجة (٣) الوترانِ المتوازيانِ فى الدائرة يحصرانِ قوسين متساويين فى القياسِ.



إذا كان أب ، جـ ى وترين فى الدائرة م، أب // جـ ى

فإن ق (أجـ⌒) = ق (ب ى⌒).

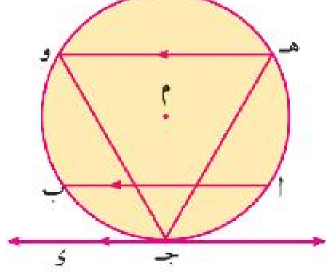
نتيجة (٤) القوسانِ المحصورانِ بين وترٍ ومماس يوازيه فى الدائرةِ متساويان فى القياسِ.



إذا كان أب وترًا فى الدائرة م، جـ ى مماسًا عند جـ، أب // جـ ى

فإن ق (أجـ⌒) = ق (ب ى⌒).

مثال (٣)



في الشكلِ المقابل:

م دائرة، $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ مماس للدائرة عند جـ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ وتران في الدائرة حيث :

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$

أثبت أن : جـ هـ = جـ و

الحل

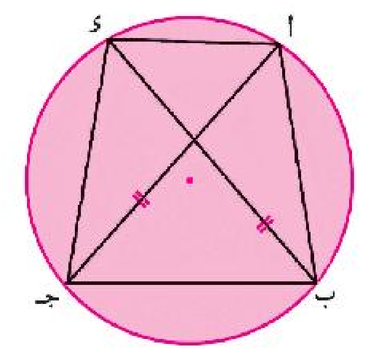
∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ ∴ ق (أ هـ) = ق (ب و) (١)

∵ المماس $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق (جـ أ) = ق (جـ ب) (٢)

بجمع طرفي (١)، (٢) ∴ ق (هـ جـ) = ق (و جـ) ∴ جـ هـ = جـ و



مثال ٤



في الشكلِ المقابل:

أ ب جـ ى شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخل دائرةٍ فيه أ جـ = ب ى ،

أ ب = (٣س - ٥)سم، جـ ى = (س + ٣)سم.

أوجد بالبرهان طول $\overline{\text{أ ب}}$.

الحل

المعطيات: أ ب جـ ى شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخل دائرة،

أ جـ = ب ى، أ ب = (٣س - ٥)سم، جـ ى = (س + ٣)سم

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$.

البرهان: ∵ أ جـ = ب ى معطى ∴ ق (أ ب جـ) = ق (ب جـ ى)

∴ ق (أ ب جـ) - ق (ب جـ) = ق (ب جـ ى) - ق (ب جـ)

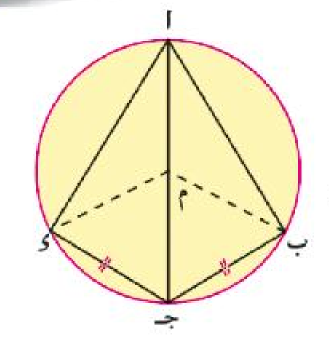
∴ ق (أ ب) = ق (ى جـ) ∴ أ ب = جـ ى

∵ أ ب = جـ ى ∴ ٣س - ٥ = س + ٣

٢س = ٨ ∴ س = ٤

∵ أ ب = ٣س - ٥ ∴ أ ب = ٣ × ٤ - ٥ = ٧سم





في الشكلِ المقابلِ:

أ ب جـ ى شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخلَ دائرة م، أجـ قطر في الدائرة،
جـ ب = جـ ى   **أثبت أن:** ق (⌒أب) = ق (⌒أى)

الحل

المعطيات: أجـ قطر في الدائرة، جـ ب = جـ ى

المطلوب: ق (⌒أب) = ق (⌒أى)

البرهان: ∵ جـ ب = جـ ى

∴ ق (⌒جـ ب) = ق (⌒جـ ى) ——— (١)

∵ أجـ قطر في الدائرة

∴ ق (⌒أب) = ١٨٠ - ق (⌒جـ ب)

∴ ق (⌒أى) = ١٨٠ - ق (⌒جـ ى) ——— (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

ق (⌒أب) = ق (⌒أى)

٢-٥

العَلاقةُ بين الزاويتينِ المحيطيَّة والمركزيَّة المشتركتينَ فى القوسِ



فى الشكلِ المقابل:

الدائرة م تمر برؤوسِ المثلث أ ب جـ المتساوى الأضلاع

◆ ما قياس ∠ ب م جـ المركزية؟

فسِّر إجابتك

◆ ما رأس ∠ ب أ جـ ؟

هل ينتمى رأسُ الزاوية إلى مجموعة نقط الدائرة م؟

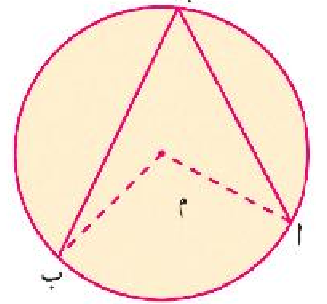
◆ ما ضلعا ∠ ب أ جـ ؟

◆ إذا كانت ∠ ب م جـ مركزيه قوسها ⌒ب جـ .فكيف تصف ∠ ب أ جـ؟

◆ قارن بين ق (∠ ب أ جـ) ، ق (∠ ب م جـ) . ماذا تلاحظ ؟

الزاوية المحيطية	هى الزاويةُ التى رأسها على الدائرة، ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترًا فى الدائرة.

فى الشكلِ المقابلِ: لاحظ أن:

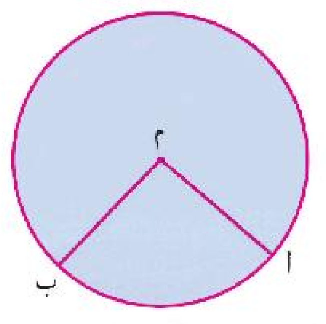


(١) ∠ أ جـ ب زاوية محيطية ويكون ⌒أ ب هو القوس المقابل لها .

(٢) لكل زاويــة محيطية توجد زاويــة مركزية واحدة تشترك معها فى القوس.



فى الشكلِ المقابلِ



ما عدد الزوايا المحيطية التى تشترك مع ∠ أ م ب المركزيه فى ⌒أ ب ؟

(وضِّح إجابتك بالرسم)

سوف تتعلم

☆ كيفية استنتاج العلاقة بين قياس الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركين في القوس.

مصطلحات أساسية

☆ زاوية مركزية.

☆ زاوية محيطية

نشاط في الشكل المقابل:

$\overline{اى}$ **قطر فى الدائرة م .ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلةِ الآتية :**

١ اذكر زوجين من الزوايا المتساوية فى القياسِ.

٢ إذا كان ق (∠ ب أ ى) = ٤٠°، أوجد ق (∠ ب م ى) .

٣ إذا كان ق (∠ جـ أ ى) = ٣٠°، أوجد ق (∠ جـ م ى) .

٤ قارن بين ق (∠ ب أ جـ) ، ق (∠ ب م جـ) . **ماذا تستنتج ؟**



نظرية

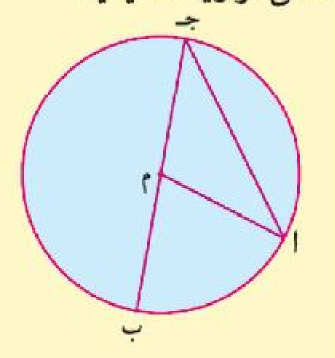
قياسُ الزاويةِ المحيطيَّة يساوى نصفَ قياسِ الزاوية المركزيَّة المشتركة معها فى القوس.

المعطيات: ∠ ا جـ ب زاوية محيطية، ∠ ا م ب زاوية مركزية .

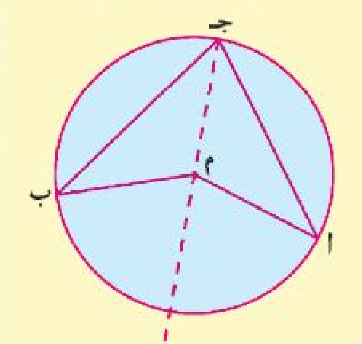
المطلوب : إثبات أن ق (∠ ا جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ا م ب) .

البرهان : **توجد ثلاثُ حالاتٍ لإثبات صحة النظرية .**

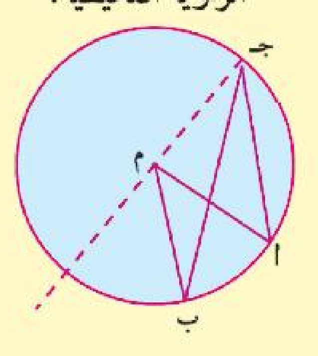
١ إذا كانت م تنتمى إلى أحد ضلعى الزاوية المحيطية.



٢ إذا كانت م نقطة داخل الزاوية المحيطية.



٣ إذا كانت م نقطة خارج الزاوية المحيطية.



الحالة الأولى: إذا كانت م تنتمى إلى أحد ضلعى الزاوية المحيطية .

∵ ∠ ا م ب خارجه عن △ ا م جـ

∴ ق (∠ ا م ب) = ق (∠ ا) + ق (∠ جـ) ①

∵ ا م = جـ م (أطوال أنصاف أقطار) ∴ ق (∠ ا) = ق (∠ جـ) ②

من ①، ② ينتج أن : ق (∠ ا م ب) = ٢ ق (∠ جـ)

∴ ق (∠ ا جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ا م ب) (وهو المطلوب)

نشاط

برهِن صحةَ النَّظرية فى الحالتين الأخريين .



فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية، م دائرة ، أوجد قيمةَ الرمز المجهول المستخدم فى القياسِ :
(س، ص، ع، ل) .

١ ٢ ٣

٤ ٥ ٦

٧ ٨ ٩

١٠ ١١ ١٢

مثال (١)

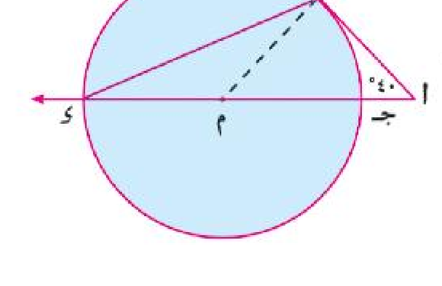
ا نقطة خارج الدائرة م، $\overleftarrow{اب}$ مماس للدائرة عند ب، $\overleftarrow{ام}$ قطع الدائرة م فى جـ، ء على التّرتيب، ق(∠ا) = ٤٠°. **أوجد** بالبرهان ق (∠ب ء جـ)

الحل

المعطيات: $\overleftarrow{اب}$ مماسّ للدائرةِ عند ب، ق (∠ا) = ٤٠°، $\overleftarrow{ام}$ قطع الدائرة م فى جـ، ء .

المطلوب: ق (∠ب ء جـ)

العمل: نرسم نصف القطر $\overline{ب م}$



البرهان: ∵ $\overleftarrow{اب}$ مماسّ للدائرةِ عند ب ، $\overline{ب م}$ نصف قطر .

∴ ق (∠ا ب م) = ٩٠°

فى Δ ا ب م :

∵ ق (∠ا) = ٤٠°، ق (∠ا ب م) = ٩٠°

∴ ق (∠ب م جـ) = ١٨٠° - (٤٠° + ٩٠°) = ٥٠°

∵ ∠ب ء جـ المحيطية، ∠ب م جـ المركزية مشتركتان فى $\overset{\frown}{ب جـ}$.

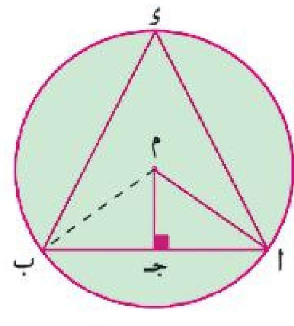
∴ ق (∠ب ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ب م جـ)

∴ ق (∠ب ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٥٠ = ٢٥° (وهو المطلوب)

مثال (٢)

فى الشكلِ المقابلِ: $\overline{اب}$ وتر فى الدائرة م، $\overline{م جـ}$ ⊥ $\overline{اب}$.

أثبت أن : ق (∠ا م جـ) = ق (∠ا ء ب)



الحل

نرسم $\overline{ب م}$ ، فى Δ م ا ب :

∵ م ا = م ب، $\overline{م جـ}$ ⊥ $\overline{اب}$

∴ ق (∠ا م جـ) = ق (∠ب م جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ا م ب) (١)

∵ ∠ا ء ب المحيطية، ∠ا م ب المركزيه مشتركتان فى $\overset{\frown}{اب}$

∴ ق (∠ا ء ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ا م ب) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: ق (∠ا م جـ) = ق (∠ا ء ب) .



نتيجة (١) قياسُ الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

فى الشكلِ المقابلِ:

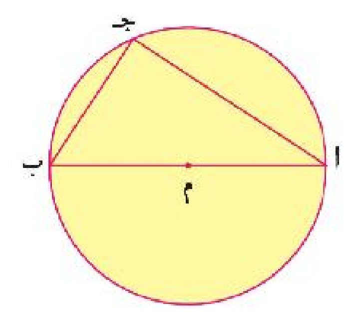
ق ($\angle$ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\angle$ ا م ب)، ق ($\angle$ ا م ب) = ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$)

$\therefore$ ق ($\angle$ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$)





نتيجة (٢) الزاويةُ المحيطيةُ المرسومةُ فى نصف دائرة قائمة



أى أن:

إذا كان القوسُ المقابلُ للزاوية المحيطيَّة يساوى نصفَ الدائرة

فإن: ق ($\angle$ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$)

$\because$ ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ١٨٠° $\qquad$ $\therefore$ ق ($\angle$ جـ) = ٩٠°

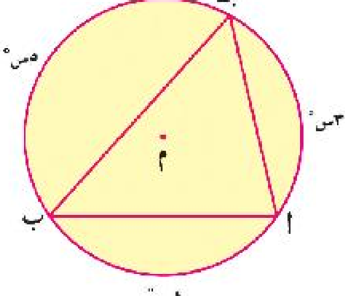


- ما نوعُ الزاوية المحيطية التى تقابل قوساً أصغر من نصف دائرة ؟ لماذا ؟
- ما نوعُ الزاوية المحيطية التى تقابل قوساً أكبر من نصف دائرة ؟ لماذا ؟
- هل الزاوية المحيطية القائمة تكون مرسومة فى نصفِ دائرة ؟ فسر إجابتك.

مثال (٣)

فى الشكلِ المقابلِ: ا ب جـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م، ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) : ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) : ق ($\overset{\frown}{\text{ا جـ}}$) = ٤ : ٥ : ٣

أوجد ق ($\angle$ ا جـ ب) :



الحل

نفرض أن :

ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ٤س° ، ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ٥س° ، ق ($\overset{\frown}{\text{ا جـ}}$) = ٣س°

$\therefore$ ٤س + ٥س + ٣س = ٣٦٠

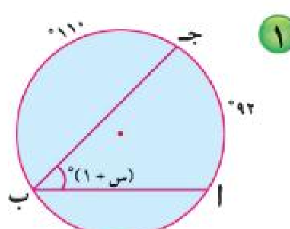
١٢س = ٣٦٠ $\qquad$ $\therefore$ س = ٣٠

$\therefore$ ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ٤ $\times$ ٣٠ = ١٢٠° ويقابل $\angle$ ا جـ ب المحيطية .

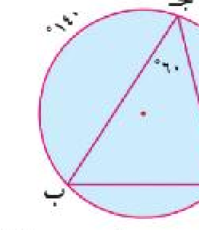
$\because$ ق ($\angle$ ا جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) $\qquad$ $\therefore$ ق ($\angle$ ا جـ ب) = $\frac{1}{2}$ $\times$ ١٢٠° = ٦٠°



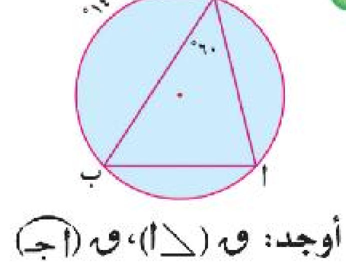
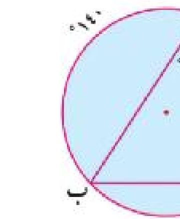
ادرس كلاً من الأشكالِ الآتية ثم أوجد قياس الزاوية أو القوس المطلوب فى كل شكل:

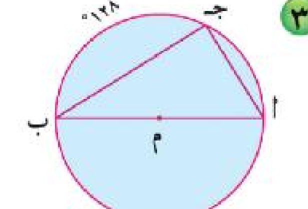
١ 

أوجد: س، ق (أب)

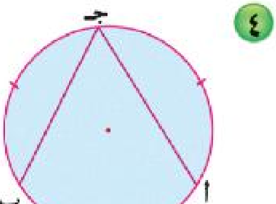
٢ 

أوجد: ق (∠أ)، ق (أجـ)

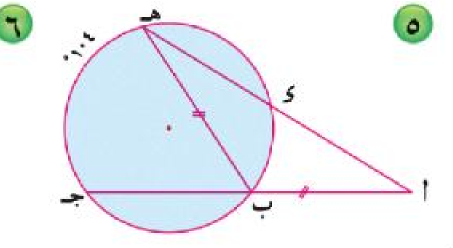



٣ 

أوجد: ق (∠جـ)، ق (∠ب)

٤ 

أوجد: ق (∠جـ)

٥ 

أوجد: ق (∠هـ أ جـ)

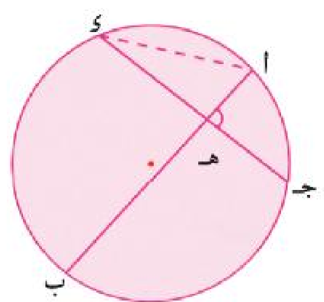
٦

أوجد: ق (∠ى جـ ب)

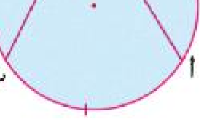
مثال ٤

تمرين مشهور (١)

إذا تقاطع وتران فى نقطةٍ داخل الدائرةِ، فإن قياس زاويةِ تقاطعهما يساوى نصفَ مجموع قياسى القوسين المقابلين لها .



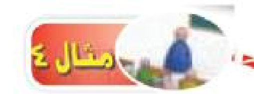
الحل



المعطيات: $\overline{أب} \cap \overline{جـ ى} = \{هـ\}$



المطلوب: ق (∠أ هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (أجـ) + ق (ب ى)]



العمل: نرسم $\overline{أى}$



البرهان: ∵ ∠أ هـ جـ خارجة عن Δ أ هـ ى .



∴ ق (∠أ هـ جـ) = ق (∠ى) + ق (∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق (أجـ) + $\frac{1}{2}$ ق (ب ى)



= $\frac{1}{2}$ [ق (أجـ) + ق (ب ى)] .



مثال (٥)

تمرين مشهور (٢)

إذا تقاطع شعاعانِ حاملانِ لوترين في دائرةٍ خارجها، فإن قياسَ زاوية تقاطعهما يساوى نصفَ قياس القوسِ الأكبر مطروحًا منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية .



الحل

المعطيات: $\overleftarrow{اب} \cap \overleftarrow{جـ ى} = \{هـ\}$

المطلوب: ق (∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{اجـ}$) - ق($\overset{\frown}{بى}$)]

العمل: نرسم $\overline{بجـ}$.

البرهان: ∵ ∠ ا ب جـ خارجة عن Δ ب هـ جـ .

∴ ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ هـ) + ق (∠ ب جـ ى)

∴ ق (∠ هـ) = ق (∠ ا ب جـ) - ق (∠ ب جـ ى)

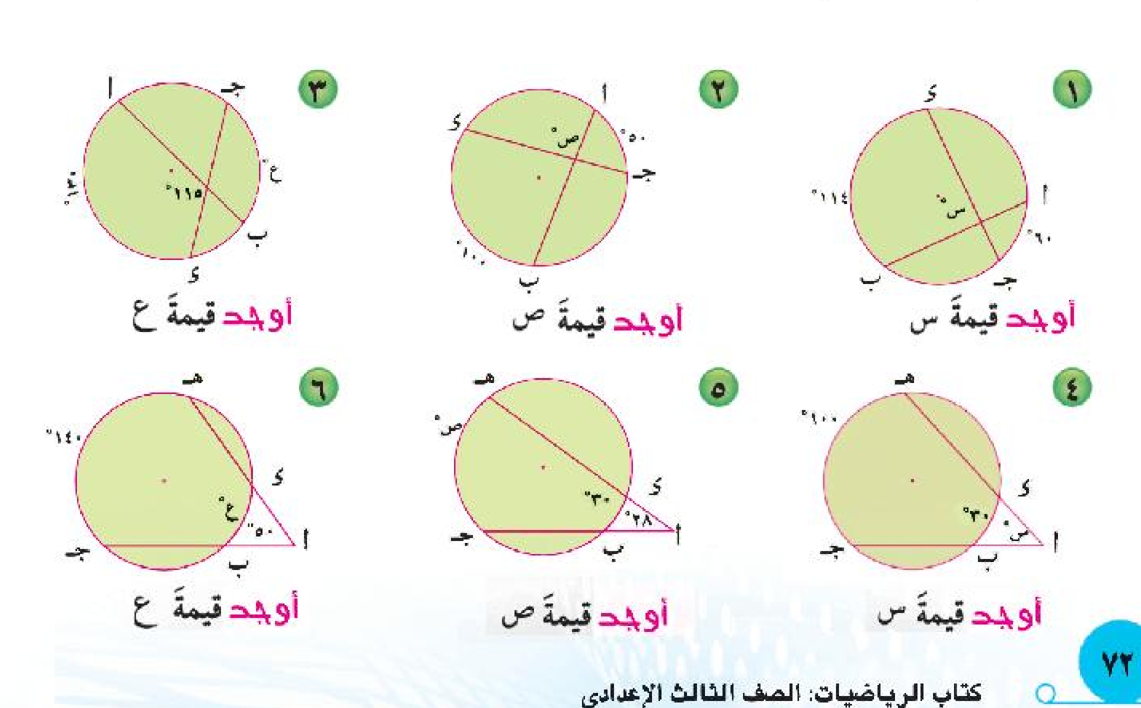
= $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{اجـ}$) - $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{بى}$)

= $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{اجـ}$) - ق($\overset{\frown}{بى}$)] وهو المطلوب



تدرب

فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية.



مثال (٦)

فى الشكلِ المقابلِ:

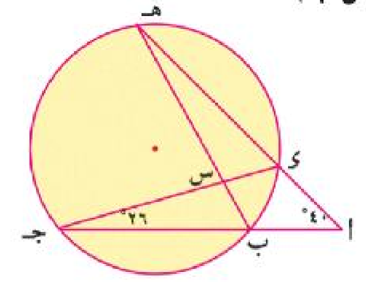
جـ ب ∩ هـ ى = {أ}، ق(∠أ) = ٤٠°، ى جـ ∩ ب هـ = {س}، ق(∠ب جـ ى) = ٢٦°

أوجد: أ ق(جـ هـ) ب ق(∠هـ س جـ).

الحل

المعطيات: جـ ب ∩ هـ ى = {أ}، ق(∠أ) = ٤٠°، ى جـ ∩ ب هـ = {س}، ق(∠ب جـ ى) = ٢٦°

المطلوب: أ ق(جـ هـ) ب ق(∠هـ س جـ).



البرهان: ∵ ق(∠ب جـ ى) = ٢٦°

∴ ق(ب ى) = ٢ق(∠ب جـ ى) = ٥٢°

∵ جـ ب ∩ هـ ى = {أ}

∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(جـ هـ) - ق(ب ى)]

∴ ٤٠ = $\frac{1}{2}$ [ق(جـ هـ) - ٥٢]

ق(جـ هـ) = ٨٠ + ٥٢ = ١٣٢° **(وهو المطلوب أولاً)**

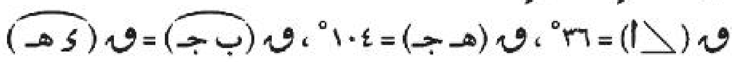
∵ ى جـ ∩ ب هـ = {س} ∴ ق(∠هـ س جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(جـ هـ) + ق(ب ى)]

ق(∠هـ س جـ) = $\frac{1}{2}$ [١٣٢ + ٥٢] = $\frac{1}{2}$ × ١٨٤ = ٩٢° **(وهو المطلوب ثانيًا)**

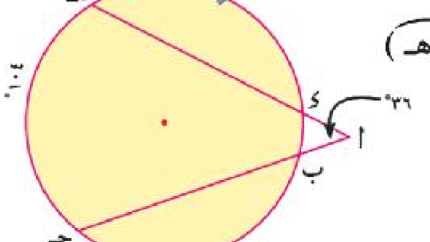
مثال (٧)

فى الشكلِ المقابلِ:

ق(∠أ) = ٣٦°، ق(هـ جـ) = ١٠٤°، ق(ب جـ) = ق(ى هـ)



أوجد: أ ق(ب ى) ب ق(ى هـ).



الحل

أكمل: ∵ جـ ب ∩ هـ ى = {أ}

∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(جـ هـ) - ق(ب ى)]

∴ ٣٦ = $\frac{1}{2}$ [١٠٤° - ق(ب ى)] ∴ ق(ب ى) = ٣٢° **(المطلوب أولاً)**

∵ ق(ى هـ) + ق(ب جـ) = ٣٦٠° - (١٠٤° + ٣٢°) = ٢٢٤°

∵ ق(ى هـ) = ق(ب جـ)

∴ ٢ق(ى هـ) = ٢٢٤° ∴ ق(ى هـ) = ١١٢° **(المطلوب ثانيًا)**

٥ - ٣

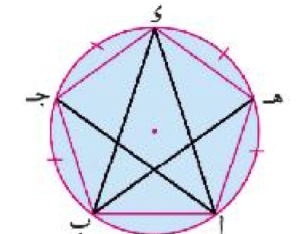
الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس



سوف تتعلم

☆ كيفية استنتاج العلاقة بين الزوايا المحيطية التي تحصر أقواسًا متساوية في القياس.

فكر وناقش



فى الشكلِ المقابلِ : ق (أب⌒) = ١٠٠°

♦ هل تحصر الزوايا المحيطية ∠ أ هـ ب ، ∠ أ ء ب ، ∠ أ جـ ب نفس القوس؟

♦ أوجد ق (∠ أ هـ ب)، ق (∠ أ ء ب)، ق (∠ أ جـ ب).

ماذا تلاحظ ؟

♦ هل الزوايا المحيطية التى تحصر أقواسًا متساويةً فى القياسِ، تكون متساويةً فى القياسِ ؟ فسِّر إجابتك؟

نظرية ٢

الزوايا المحيطية التى تحصرُ نفسَ القوس فى الدائرة الواحدة متساويةٌ فى القياسِ.

المعطيات: ∠ جـ ، ∠ ء ، ∠ هـ زوايا محيطيَّة مشتركة فى أب⌒.

المطلوب: ق (∠ جـ) = ق (∠ ء) = ق (∠ هـ)

البرهان: ∵ ق (∠ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (أب⌒)

، ق (∠ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (أب⌒)

، ق (∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (أب⌒)

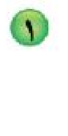
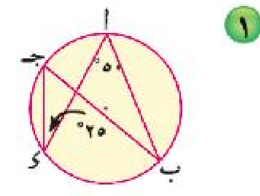
∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ ء) = ق (∠ هـ)



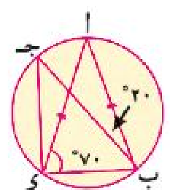
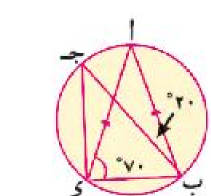
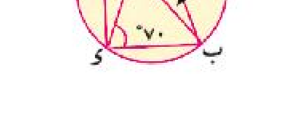
وهو المطلوب.



تدرب ادرس كلاً من الأشكالِ الآتية ثم أوجد قياسات الزوايا المبينة أسفل كل شكل:

ق (∠جـ)، ق (∠ب)

ق (∠جـ)، ق (∠ب ى جـ)

ق (∠ب هـ ى)، ق (∠أ ب هـ)

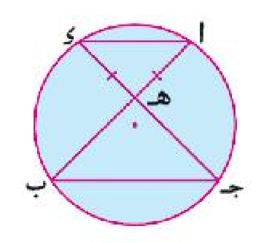




في الشكلِ المقابلِ :

$\overline{أب} \cap \overline{جـى}$ = {هـ}، هـ أ = هـ ى

أثبت أن : هـ ب = هـ جـ .





في Δ أ هـ ى ∵ هـ أ = هـ ى ∴ ق (∠ى) = ق (∠أ) (١)

∵ ∠أ ب جـ ، ∠أ ى جـ محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{أجـ}$ ∴ ق (∠ب) = ق (∠ى) (٢)

∵ ∠ى جـ ب ، ∠ى أ ب محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{بى}$ ∴ ق (∠جـ) = ق (∠أ) (٣)

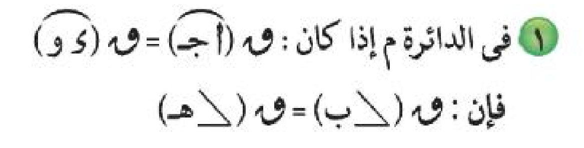
من (١)، (٢)، (٣) نستنتج أن: ق (∠ب) = ق (∠جـ)

في Δ هـ ب جـ: ∵ ق (∠ب) = ق (∠جـ) ∴ هـ ب = هـ جـ (وهو المطلوب)



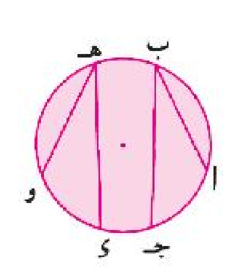
نتيجة الزوايا المحيطية التى تحصرُ أقواساً متساويةً فى القياسِ فى الدائرةِ الواحدة (أو فى عدة دوائر) متساويةً فى القياسِ

لاحظ أن :



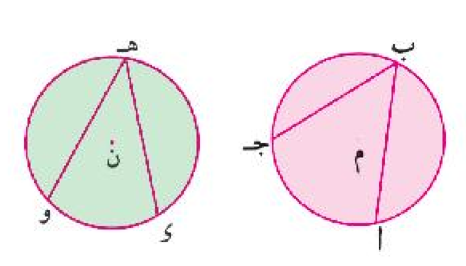
١ فى الدائرة م إذا كان : ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ء و)

فإن : ق (∠ ب) = ق (∠ هـ)



٢ لأى دائرتينِ م، ن إذا كان : ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ء و)

فإن : ق (∠ ب) = ق (∠ هـ)



٣ عكسُ النتيجة السابقة صحيحٌ ، أى أن :

الزوايا المحيطية المتساويةُ فى القياسِ فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر) تحصر أقواسًا متساويةً فى القياسِ .

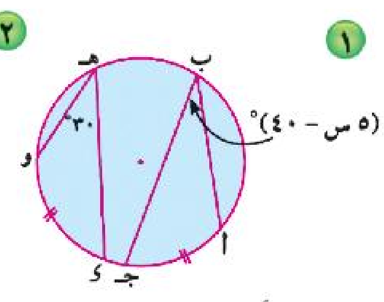


فكر هل كلُّ وترين لا يتقاطعان داخل الدائرة ، ويحصران قوسين متطابقين، متوازيين ؟ فسر إجابتك

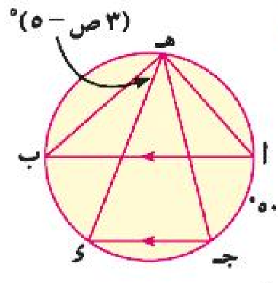




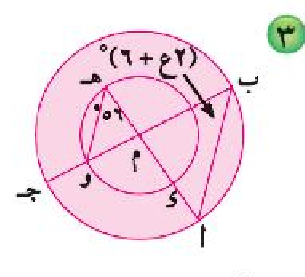
في كلٍّ من الأشكالِ الآتية، أوجد قيمةَ الرمز المستخدم في القياسِ :



أوجد قيمة س



أوجد قيمة ص



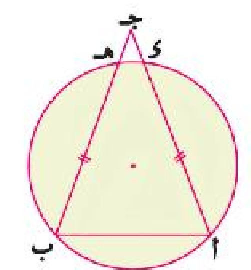
أوجد قيمة ع

مثال (٢)

في الشكلِ المقابلِ:

$\overline{أى}$ ، $\overline{ب هـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة ، $\overleftarrow{أى} \cap \overleftarrow{ب هـ} = \{جـ\}$.

أثبت أن : جـ ى = جـ هـ .



الحل

المعطيات: أى = ب هـ

المطلوب: إثبات أن : جـ ى = جـ هـ

البرهان: ∵ أى = ب هـ ∴ ق ($\overset{\frown}{أى}$) = ق ($\overset{\frown}{ب هـ}$)

بإضافة ق ($\overset{\frown}{ى هـ}$) لكلٍّ من الطرفين ينتج أن : ق ($\overset{\frown}{أى هـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب هـ ى}$)

∴ ق (∠ب) = ق (∠أ) (نتيجة)

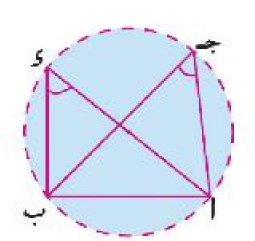
في △ أ ب جـ ∵ ق (∠أ) = ق (∠ب) ∴ أ جـ = ب جـ (١)

∵ أى = ب هـ (٢)

بطرح طرفي (٢) من (١) ينتج أن : جـ ى = جـ هـ (وهو المطلوب)

عكس نظرية ٢

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة، وفى جهة واحدة منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وترًا فيها.



فى الشكلِ المقابلِ لاحظ أن :

∠ جـ ، ∠ ى مرسومتان على القاعدة $\overline{أب}$ ، وفى جهة واحدة منها ،

ق (∠ جـ) = ق (∠ ى)

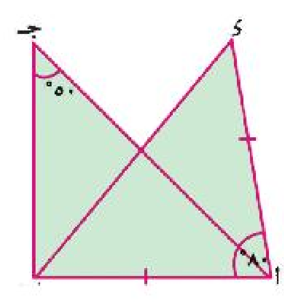
فتكون : النقط أ، ب، جـ، ى تمر بها دائرة واحدة، ويكون $\overline{أب}$ وترًا فيها .

مثال (٤)

فى الشكلِ المقابلِ : أب = أى ، ق (∠أ) = ٨٠° ، ق (∠ جـ) = ٥٠°

أثبت أن : النقط أ، ب، جـ، ى تمر بها دائرة واحدة .





فى △ أ ب ى

∵ أب = أى ، ق (∠أ) = ٨٠°

∴ ق (∠ى) = ق (∠أ ب ى) = $\frac{١٨٠ - ٨٠}{٢}$ = ٥٠°

∵ ق (∠ى) = ق (∠ جـ) = ٥٠°

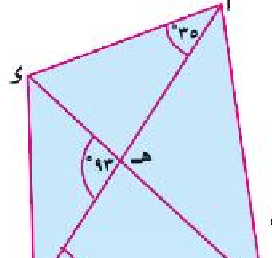
وهما زاويتان مرسومتان على القاعدةِ $\overline{أب}$ وفى جهةٍ واحدة منها .

∴ النقط أ، ب، جـ، ى تمر بها دائرة واحدة

٥ - ٤

الشكلُ الرباعىُّ الدائرىُّ

فكر وناقش



فى الشكلِ المقابلِ :

أ ب جـ ء شكلٌ رباعىٌّ تقاطع قطراه فى هـ ،

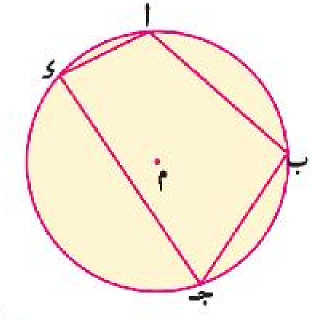
ق ($\angle$ أ جـ ب) = ٥٨°، ق ($\angle$ جـ أ ء) = ٣٥°،

ق ($\angle$ جـ هـ ء) = ٩٣° .

هل يمكنُ رسمُ دائرةٍ تمر برؤوس الشكلِ الرباعى أ ب جـ ء ؟ فسر إجابتك .

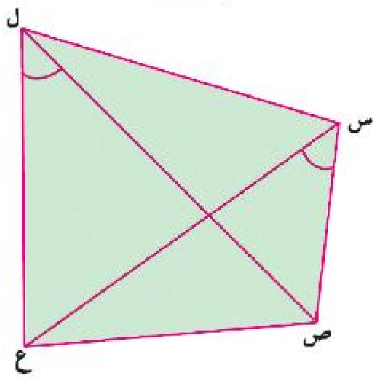
الشكل الرباعى الدائرى	هو شكلٌ رباعىٌّ تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.

لاحظ :



١ الشكل أ ب جـ ء رباعيًا دائريًا ، لأن رؤوسه أ، ب، جـ، ء تنتمى للدائرة م .

٢ الشكل س ص ع ل رباعيًا دائريًا لأن :



ق ($\angle$ ص س ع) = ق ($\angle$ ص ل ع)

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{ص ع}}$ وفى جهةٍ واحدة منها ،

فيمكن رسمُ دائرة تمرُّ بالنقط س، ص، ع، ل .

أى أن رؤوس الشكل س ص ع ل تنتمى لدائرة واحدة.

سوف تتعلم

- مفهوم الشكل الرباعي الدائري
- تحديد متى يكون الشكل الرباعي دائريًا

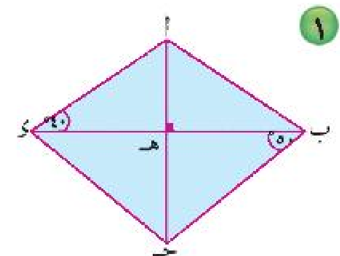
مصطلحات أساسية

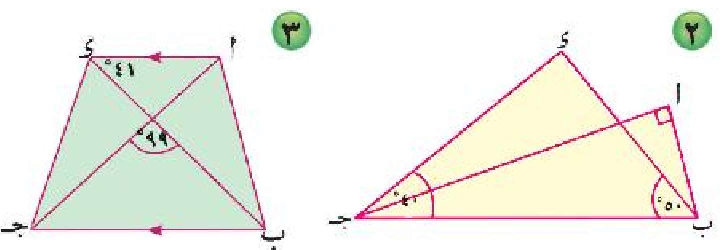
- شكل رباعي دائري.

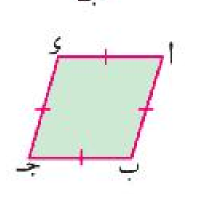


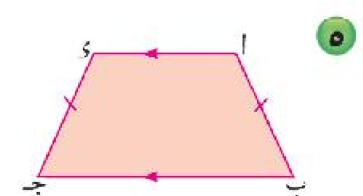
آجب عن السؤال الآتى في كراسة الفصل:

بيِّن أى من الأشكالِ الأتيه رباعيًّا دائريًّا ، فسر إجابتك.





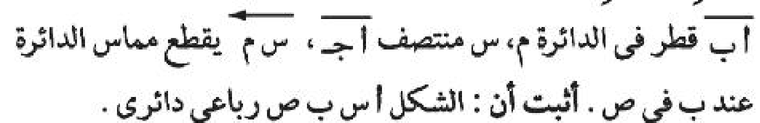






فى الشكلِ المقابلِ :

$\overline{اب}$ قطر فى الدائرة م، س منتصف $\overline{اجـ}$ ، $\overleftarrow{سم}$ يقطع مماس الدائرة عند ب فى ص . أثبت أن : الشكل ا س ب ص رباعى دائرى .





المعطيات: $\overline{اب}$ قطر فى الدائرة م، ا س = جـ س، $\overleftarrow{ب ص}$ مماس للدائرة عند ب

المطلوب: إثبات أن : ا س ب ص رباعيًّا دائريًّا .

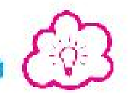
البرهان: ∵ س منتصف $\overline{اجـ}$ ∴ $\overline{م س} \perp \overline{اجـ}$ ، ق (∠ا س ص) = ٩٠°

∵ $\overline{اب}$ قطر ، $\overleftarrow{ب ص}$ مماس عند ب ∴ $\overleftarrow{ب ص} \perp \overline{اب}$ ، ق (∠ا ب ص) = ٩٠°

∵ ق (∠ا س ص) = ق (∠ا ب ص) = ٩٠°

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{اص}$ وفى جهة واحدة منها .

∴ الشكل ا س ب ص رباعى دائرى .



فكر فى المثالِ السابق، أين يقعُ مركزُ الدائرةِ المارة برؤوس الشكلِ ا س ب ص؟ فسر إجابتك.

مثال (٢)

ا ب جـ ى شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ تقاطع قطراه في و، س ∈ $\overline{او}$ ، ص ∈ $\overline{ى و}$ حيث $\overline{س ص}$ // $\overline{ا ى}$.

أثبت أن : **أولاً:** الشكل ب س ص جـ رباعيٌّ دائرى .

ثانيًا: ق (∠ س ب ص) = ق (∠ س جـ ص)

الحل

المعطيات: ا ب جـ ى شكلٌ رباعى مرسوم داخل دائرة $\overline{س ص}$ // $\overline{ا ى}$

المطلوب: إثبات أن : **أولاً:** الشكلُ ب س ص جـ رباعى دائرى .

ثانيًا: ق (∠ س ب ص) = ق (∠ س جـ ص)

البرهان: ∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ا ى}$

∴ ق (∠ جـ ا ى) = ق (∠ جـ س ص) **بالتناظر**

∵ ق (∠ جـ ا ى) = ق (∠ جـ ب ى) **محيطيتان مشتركتان فى $\frown{جـ ى}$**

∴ ق (∠ جـ س ص) = ق (∠ جـ ب ص)

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة جـ ص وفى جهةٍ واحدةٍ منها .

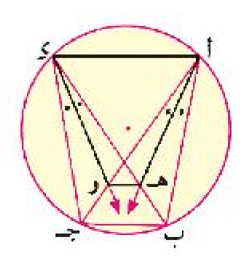
∴ الشكل ب س ص جـ رباعى دائرى **(وهو المطلوب أولاً)**

∵ الشكل ب س ص جـ رباعى دائرى **(إثباتاً)**

∴ ق (∠ س ب ص) = ق (∠ س جـ ص)

لأنهما زاويتانِ محيطيتان مشتركتانِ فى $\frown{س ص}$. **(وهو المطلوب ثانيًا)**

مثال (٣)



فى الشكلِ المقابلِ :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ جـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

$\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، $\overrightarrow{\text{ء و}}$ ينصف ∠ ب ء جـ،

أثبت أن : أولاً: أ هـ و ء رباعى دائرى .

ثانياً: $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

المعطيات: أب جـ د شكل رباعى دائرى

$\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، $\overrightarrow{\text{ء و}}$ ينصف ∠ ب ء جـ

المطلوب إثبات أن:

أولا : أ هـ و ء رباعى دائرى

ثانيا : $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهان

ق(∠ ب أ جـ) = ق (∠ ب ء جـ) (١) محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ ق (∠ هـ أ و) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ب أ جـ)

بالمثل ق (∠ هـ ء و) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ب ء جـ) } (٢

من ١) ، ٢)

∴ ق (∠ هـ أ و) = ق (∠ هـ ء و)

∴ الشكل أ هـ و ء رباعى دائرى (وهو المطلوب أولا)

∴ ق (∠ و هـ ء) = ق (∠ جـ أ ء)

∵ (∠ جـ ب ء) = ق (∠ جـ أ ء)

∴ ق (∠ و هـ ء) = ق (∠ جـ ب ء) وهما متناظرتان

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (وهو المطلوب ثانيا)

٥ ـ ٥

خواصُّ الشكْل الرباعىّ الدائرى



سوف تتعلم

- ☆ خواص الشكل الرباعي الدائري.
- ☆ كيفية حل مسائل على خواص الشكل الرباعي الدائري.

مصطلحات أساسية

- ☆ شكل رباعي دائري.

فكر وناقش

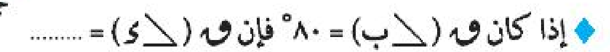
فى الشكلِ المقابلِ :



ق (∠ا) = ٦٠° ، فإن ق $\overset{\frown}{(ب جـ ى)}$ = ... °

◆ إذا كان ق $\overset{\frown}{(ب ا ى)}$ = ... °

◆ إذا كان ق (∠ب جـ ى) = ... °



◆ إذا كان ق (∠ب) = ٨٠° فإن ق (∠ى) = ...

◆ ماذا تلاحظ على مجموعِ الزاويتين المتقابلتين فى الشكل الرباعى الدائرى.

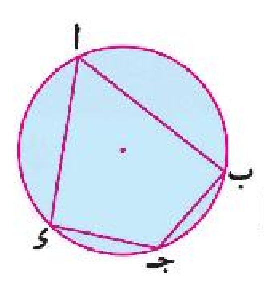
نظرية ٣

إذا كان الشكلُ الرباعىُّ دائريًا فإن كلُّ زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان .

المعطيات: ا ب جـ ى شكل رباعى دائرى .

المطلوب: إثبات أن : ① ق (∠ا) + ق (∠جـ) = ١٨٠°

② ق (∠ب) + ق (∠ى) = ١٨٠°



البرهان: ∵ ق (∠ا) = $\frac{1}{2}$ ق $\overset{\frown}{(ب جـ ى)}$

، ق (∠جـ) = $\frac{1}{2}$ ق $\overset{\frown}{(ب ا ى)}$

∴ ق (∠ا) + ق (∠جـ)

= $\frac{1}{2}$ [ق $\overset{\frown}{(ب جـ ى)}$ + ق $\overset{\frown}{(ب ا ى)}$]

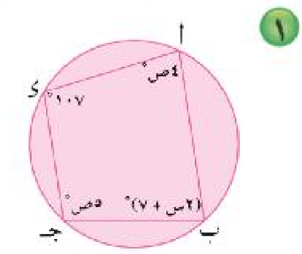
= $\frac{1}{2}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

بالمثل: ق (∠ب) + ق (∠ى) = ١٨٠° (وهو المطلوب)

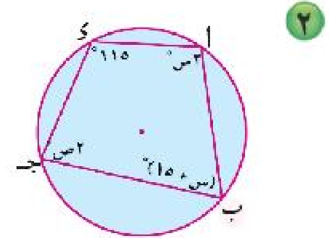
تدرب

في كلٍ من الأشكالِ الآتيةِ أوجد قيمةَ س، ص

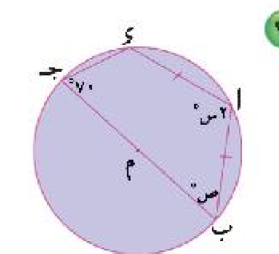
١



٢



٣



مثال (١)

أ ب جـ ء شكلٌ رباعيٌ مرسومٌ داخلَ الدائرة م، م ∈ $\overline{أب}$ ، جـ ب = جـ ء ، ق ∠ (ب جـ ء) = ١٤٠°

أوجد : أولاً: ق (∠ أ) **ثانياً:** ق (∠ ء)

الحل



∵ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ١٨٠° **(نظرية)**

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠° (المطلوب أولاً)

نرسم $\overline{ب ء}$ ، في △ ب جـ ء ∵ جـ ب = جـ ء

∴ ق (∠ جـ ء ب) = ق (∠ جـ ب ء) = $\frac{١٨٠ - ١٤٠}{٢}$ = ٢٠°

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ∴ ق (∠ أ ء ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠° + ٢٠° = ١١٠° (وهو المطلوب ثانيا)

نتيجة قياسُ الزاوية الخارجة عند أيِّ رأسٍ من رؤوس الشكلِ الرباعيِّ الدائري يساوي قياسَ الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

في الشكلِ المقابلِ :



أ ب جـ ء رباعي دائري ، هـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، هـ ∉ $\overline{أب}$

∴ ∠ هـ ب جـ زاوية خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ ء

، ∠ ء هي الزاوية الداخلة المقابلة لها .

فيكون : ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ ء) **(مكملاتُ الزاوية الواحدة متساويةٌ في القياس)**

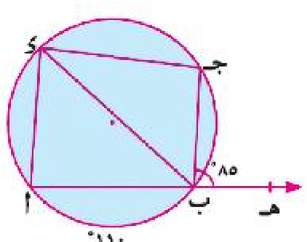




في الشكلِ المقابلِ:

هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ ، ق (أب⌒) = ١١٠° ، ق (∠ جـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد ق (∠ ب ى جـ) .



الحل

∵ ق (أب⌒) = ١١٠° ، ∠ أ ى ب زاوية محيطية قوسها أب⌒

∴ ق (∠ أ ى ب) = $\frac{1}{2}$ ق (أب⌒) = ٥٥° .

∵ ∠ جـ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب جـ ى

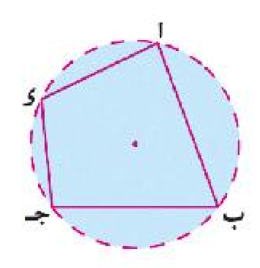
∴ ق (∠ جـ ب هـ) = ق (∠ جـ ى أ) = ٨٥° (نتيجة)

∠ ب ى جـ) = ٨٥° - ٥٥° = ٣٠° (وهو المطلوب)

عكس نظرية ٣

إذا وجدت زاويتانِ متقابلتان متكاملتان في شكل رباعيّ كان هذا الشكلُ رباعيًا دائريًا

في الشكلِ المقابلِ :



إذا كان ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ١٨٠°

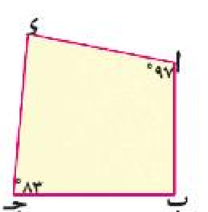
أو: ق (∠ ب) + ق (∠ ى) = ١٨٠°

فيكون الشكل أ ب جـ ى رباعيًّا دائريًّا .

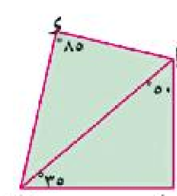
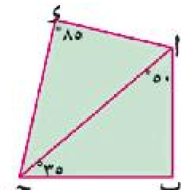


في كلٍّ من الأشكالِ الآتية أثبت أن الشكلَ أ ب جـ ى رباعي دائري :

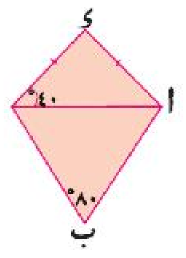
①



②

③





إذا وجدت زاويةٌ خارجةٌ عن رأسٍ من رؤوس شكل رباعىٍّ قياسها يساوى قياسَ الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعيًا دائريًا

فى الشكلِ المقابلِ :

اب جـ ء شكل رباعى، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{اب}}$

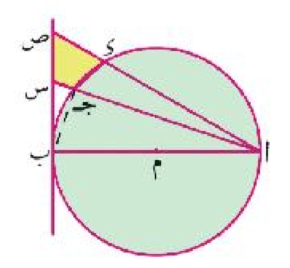
∴ ∠ هـ ب جـ زاوية خارجة عن الشكل الرباعى اب جـ ء ،

∠ ء هى الزاوية الداخلة المقابلة لها .

فإذا كان ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ ء) يكون الشكل اب جـ ء رباعيًّا دائريًّا .



فى الشكلِ المقابلِ :



$\overline{\text{اب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{اجـ}}$ ، $\overline{\text{اء}}$ وتران فيها وفى جهة واحدة من $\overline{\text{اب}}$

رسم من ب مماس للدائرة قطع $\overleftarrow{\text{اجـ}}$ فى س ، $\overleftarrow{\text{اء}}$ فى ص .

أثبت أن : الشكل س ص ء جـ رباعى دائرى .

الحل

نرسم $\overline{\text{ب جـ}}$ ∵ $\overline{\text{اب}}$ قطر

∴ ق (∠ ا جـ ب) = ٩٠° ، ∠ ا ب جـ تتم ∠ ب ا س (١)

∵ $\overline{\text{اب}}$ قطر ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ مماس للدائرة عند ب .

∴ ق (∠ ا ب س) = ٩٠° ، ∠ ا س ب تتم ∠ ب ا س (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ا س ب)

∵ ∠ ص ء جـ خارجة عن الرباعى الدائرى اب جـ ء

∴ ق (∠ ص ء جـ) = ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ا س ب)

∵ ∠ ا س ب خارجة عن الشكل الرباعى س ص ء جـ ، ∠ ص ء جـ مقابلة لها .

∴ الشكل س ص ء جـ رباعى دائرى .

فكر متى يكون الشكلُ الرباعىُّ دائريًا ؟ اذكر جميعَ الحالات الممكنة؟

٥ - ٦

العَلاقةُ بين مماسّات الدائرة

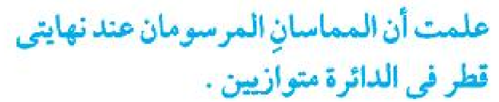
سوف تتعلم

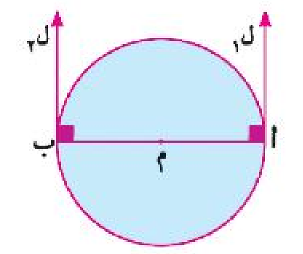
- ☆ كيفية استنتاج العلاقة بين القطعتين المماستين المرسومتين من نقطة خارج دائرة.
- ☆ مفهوم الدائرة الداخلة لمضلع.
- ☆ كيفية استنتاج العلاقة بين المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين.
- ☆ كيفية حل مسائل على العلاقة بين مماسات الدائرة.

مصطلحات أساسية

- ☆ وتر التماس.
- ☆ دائرة داخلة لمضلع.
- ☆ مماسات مشتركة.

فكر وناقش


علمت أن المماسانِ المرسومان عند نهايتي قطر فى الدائرة متوازيين .



ما العَلاقةُ بين المماسينِ المرسومينِ عند نهايتي وتر فى الدائرة لا يمر بمركزها ؟

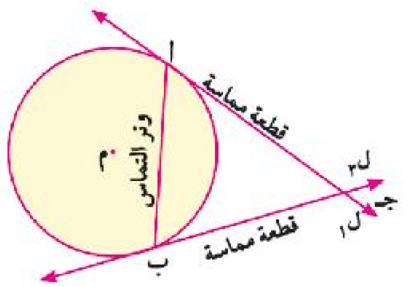
فى الشكلِ المقابلِ :

لاحظ أن :

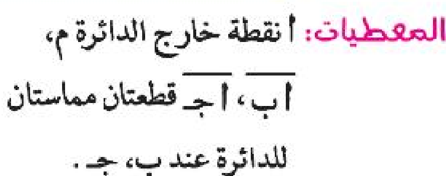
إذا كان $\overline{ا ب}$ وترًا فى الدائرة م ،

فإن المماسين $ل_١$، $ل_٢$ يتقاطعان

فى نقطة جـ .

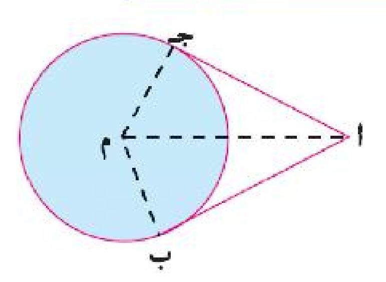


وتسمى كلٌّ من $\overline{جـ ا}$ ، $\overline{جـ ب}$ قطعةً مستقيمةً مماسةً، كما تسمى $\overline{ا ب}$ وتر التماس.



نظرية ٤

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول.



المعطيات: ا نقطة خارج الدائرة م، $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب، جـ .

المطلوب: إثبات أن : ا ب = ا جـ

العمل: نرسم $\overline{م ب}$، $\overline{م جـ}$، $\overline{م ا}$

البرهان: ∵ $\overline{ا ب}$ قطعة مماسة للدائرة م


∴ ق (∠ ا ب م) = ٩٠°

∵ $\overline{ا جـ}$ قطعة مماسة للدائرة م ∴ ق (∠ ا جـ م) = ٩٠°

∵ المثلثان ا ب م ، ا جـ م فيهما :

ق (∠ب) = ق (∠جـ) = ٩٠° (اثباتاً)

م ب = م جـ (أطوال أنصاف أقطار)

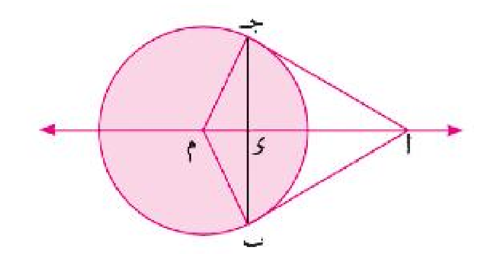
ام ضلع مشترك . ∴ △ ا ب م ≡ △ ا جـ م

وينتج أن : △ا ب ≡ △ا جـ ∴ ا ب = ا جـ (وهو المطلوب)



فى الشكلِ المقابلِ :

- لماذا يكون م ا محور ب جـ؟
- لماذا ينصف ام ∠ب ا جـ؟
- لماذا ينصف م ا ∠ب م جـ؟



نتائج النظرية:



المستقيمُ المارُّ بمركزِ الدائرةِ، ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محورًا لوتر التماسّ لهذين المماسين.

فى الشكلِ المقابلِ :

ا ب ، ا جـ مماسين للدائرة م عند ب، جـ .

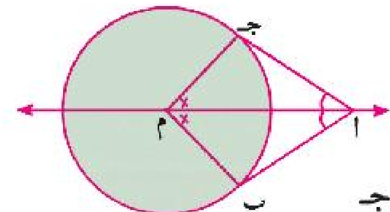
فإن : ا م محور ب جـ

ويكون: ا م ⊥ ب جـ ، ب ء = جـ ء



المستقيمُ المارُّ بمركزِ الدائرةِ، ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاويةَ بين هذين المماسين، كما ينصف الزاويةَ بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس.

فى الشكلِ المقابلِ :



ا ب ، ا جـ مماستان للدائرة م عند ب، جـ .

فإن : ا م ينصف ∠ا

∴ ق (∠ب ا م) = ق (∠جـ ا م)، م ا ينصف ∠ب م جـ

∴ ق (∠ا م ب) = ق (∠ا م جـ)

مثال (١)

في الشكلِ المقابلِ:

س ا ، س ب مماسان للدائرة عند ا، ب .

ق (∠ ا س ب) = ٧٠° ، ق (∠ ء جـ ب) = ١٢٥°

أثبت أن : أولاً: ا ب ينصف ∠ ء ا س . ثانيًا: ا ء // س ب .

الحل

المعطيات: س ا ، س ب مماسان للدائرة، ق (∠ ا س ب) = ٧٠° ، ق (∠ ء جـ ب) = ١٢٥° .

المطلوب: أولاً: ا ب ينصف ∠ ء ا س ثانيًا: ا ء // س ب .

البرهان: ∵ س ا ، س ب قطعتان مماستان. ∴ س ا = س ب

في △ س ا ب ∵ ق (∠ س ا ب) = ق (∠ س ب ا)، ق (∠ س) = ٧٠°

∴ ق (∠ س ا ب) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥° (١)

∵ الشكل ا ب جـ ء رباعي دائري، ق (∠ جـ) = ١٢٥°

∴ ق (∠ ء ا ب) = ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥° (٢) (نظرية)

من (١)، (٢) ينتج أن : ق (∠ س ا ب) = ق (∠ ء ا ب) = ٥٥°

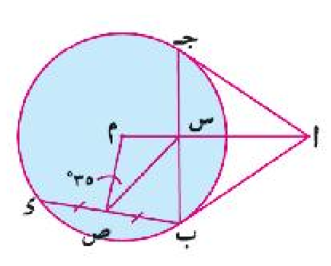
∴ ا ب ينصف ∠ ء ا س (المطلوب أولاً)

∵ ق (∠ س ب ا) = ق (∠ ء ا ب) = ٥٥° وهما متبادلتان

∴ ا ء // س ب (المطلوب ثانيًا)

مثال (٢)

في الشكلِ المقابلِ :



ا ب ، ا جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب، جـ

ا م ∩ ب جـ = {س}، ص منتصف الوتر ب ء

ق (∠ س ص م) = ٣٥° .

أ أثبت أن : الشكل س ب ص م رباعي دائري . ب أوجد ق (∠ ا) .

الحل

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب، جـ

∴ $\overleftrightarrow{أم}$ محور $\overline{ب جـ}$ ، ق (∠ب س م) = ٩٠° (١)

∵ ص منتصف الوتر $\overline{ب ى}$ ∴ ق (∠ب ص م) = ٩٠° (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ب ص م رباعي دائرى . **(وهو المطلوب أولاً)**

نرسم $\overline{ب م}$

∵ الشكل س ب ص م رباعى دائرى ، ق (∠س ص م) = ٣٥° .

∴ ق (∠س ب م) = ق (∠س ص م) = ٣٥°

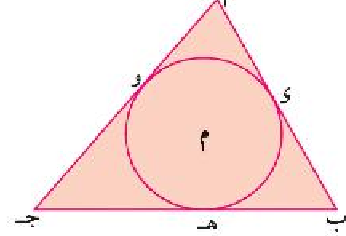
∵ $\overline{أب}$ قطعة مماسة ، $\overline{م ب}$ نصف قطر

∴ ق (∠أ ب م) = ٩٠° ∴ ق (∠أ ب جـ) = ٩٠° - ٣٥° = ٥٥°

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق (∠أ ب جـ) = ق (∠أ جـ ب) = ٥٥°

∴ ق (∠أ) = ١٨٠° - (٥٥° + ٥٥°) = ٧٠° **(وهو المطلوب ثانيًا)**

تعريف الدائرةُ الداخلةُ لمضلعٍ هى الدائرة التى تمسُّ جميعَ أضلاعه من الداخل.



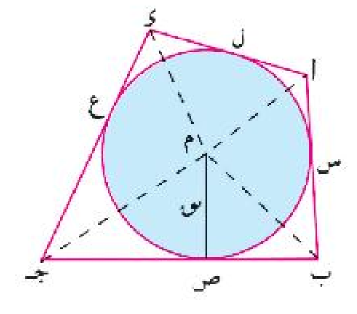
فى الشكلِ المقابلِ :

م هى الدائرةُ الداخلةُ للمثلث أ ب جـ لأنها تمسُّ أضلاعَه من الداخل فى ى ، هـ ، و .

أى أن : المثلث أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة م.

فكِّر هل مركزُ الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخله ؟ فسر إجابتك.





فى الشكلِ المقابلِ:

م دائرةٌ داخلةٌ للشكل الرباعى أ ب جـ ى ،
طول نصف قطرها ٥سم، أ ب = ٩سم جـ ى = ١٢سم.
أوجد محيط الشكل أ ب جـ ى ثم احسب مساحته.

الحل

∵ الدائرةُ م دائرة داخلة للشكل الرباعى ا ب جـ ى

∴ الدائرة م تمس أضلاع الشكل ا ب جـ ى فى س، ص، ع، ل

∵ $\overline{\text{ا س}}$، $\overline{\text{ا ل}}$ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ا س = ا ل

∵ $\overline{\text{ب س}}$، $\overline{\text{ب ص}}$ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ب س = ب ص

بالمثل يكون جـ ع = جـ ص ∴ ى ع = ى ل

بالجمع ينتج أن : (ا س + ب س) + (جـ ع + ى ع) = ا ل + ب ص + جـ ص + ى ل

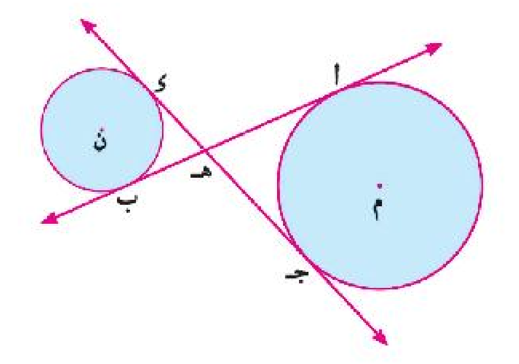
∴ ا ب + جـ ى = ا ى + ب جـ = $\frac{1}{2}$ محيط الشكل ا ب جـ ى

محيطُ الشكل ا ب جـ ى = ٢(٩ + ١٢) = ٤٢سم ،

مساحة الشكل ا ب جـ ى = $\frac{1}{2}$ ا ب × نق + $\frac{1}{2}$ ب جـ × نق + $\frac{1}{2}$ جـ ى × نق + $\frac{1}{2}$ ا ى × نق

= $\frac{1}{2}$ محيط الشكل × نق = $\frac{1}{2}$ × ٤٢ × ٥ = ١٠٥سم^2

المماساتُ المشتركةُ لدائرتين متباعدتين :

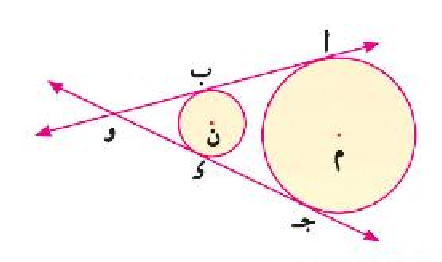


(ا) يسمى $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ مماسٌ مشتركٌ داخليٌّ للدائرتين م، ن

لأن الدائرتين م، ن تقعان فى جهتين مختلفتين من $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ ، **كما أن** $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ مماسٌ داخليٌّ للدائرتين .

لاحظ أن : $\overline{\text{ا ب}}$ ∩ $\overline{\text{جـ ى}}$ = {هـ}

فى الشكلِ المقابلِ : أثبت أن : ا ب = جـ ى



(ب) يسمى $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ مماسٌ مشتركٌ خارجيٌّ للدائرتين م، ن ،

لأن الدائرتين م، ن تقعان فى جهة واحدة من $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ ،

كما أن $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ مماس خارجى للدائرتين .

لاحظ أن : $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ = {و}

فى الشكلِ المقابل : أثبت أن : ا ب = جـ ى .

٥ - ٣

الزاويةُ المماسيّة



سوف تتعلم

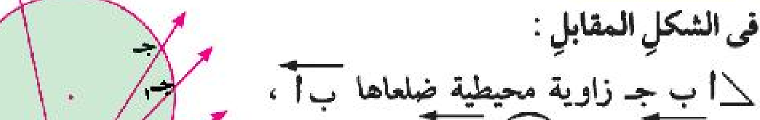
- ☆ مفهوم الزاوية المماسية.
- ☆ كيفية استنتاج علاقة الزاوية المماسية بالزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.
- ☆ علاقة الزاوية المماسية بالزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس .
- ☆ كيفية حل المسائل على الزاوية المماسية.

مصطلحات أساسية

- ☆ زاوية مماسية.
- ☆ زاوية محيطية.
- ☆ زاوية مركزية.

فكر وناقش

فى الشكلِ المقابلِ :



∠ أ ب جـ زاوية محيطية ضلعاها $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ وقوسها $\frown{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ مماس للدائرة عند ب .إذا تصورنا دوران أحد ضلعى الزاوية المحيطية، وليكن $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ مبتعداً عن $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ فيأخذ أحد الأوضاع $\overleftarrow{\text{ب جـ}_1}$، $\overleftarrow{\text{ب جـ}_2}$، ....



- ♦ هل يزدادُ قياسُ الزاوية المحيطية الناشئة مثل ∠ أ ب جـ$_1$، ∠ أ ب جـ$_2$، ......
- ♦ هل يزداد ق ($\frown{\text{أ جـ}_1}$)، ق ($\frown{\text{أ جـ}_2}$) ، .... ؟
- ♦ إذا انطبق $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ على $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ **ماذا تلاحظ ؟**

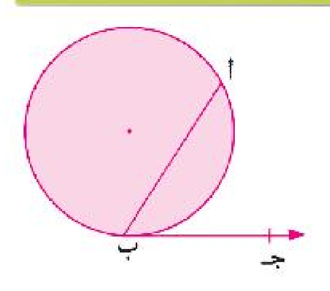
لاحظ أننا نحصل على أكبرِ زاوية محيطية فى القياس حينما يكاد ينطبقُ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ على $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ وتسمى ∠ أ ب ى عندئذٍ بالزاوية المماسية، وهى حالةٌ خاصةٌ من الزاوية المحيطية وعندها يكون :

$$\text{ق}(\angle \text{أ ب ى}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\frown{\text{أ جـ ب}})$$

الزاويةُ المماسيةُ	هى الزاويةُ المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما مماسٌ للدائرة، والآخر يحمل وتراً فى الدائرة يمر بنقطة التماس.

ويكون :

قياسُ الزاوية المماسية نصفَ قياس القوس المحصور بين ضلعيهما .

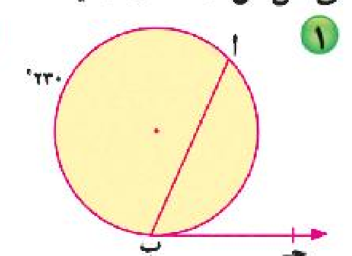


أى أن : $\text{ق}(\angle \text{أ ب جـ}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\frown{\text{أ ب}})$

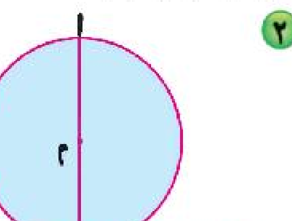


في كلٍّ من الأشكال الآتية احسب ق (∠ أ ب جـ) .

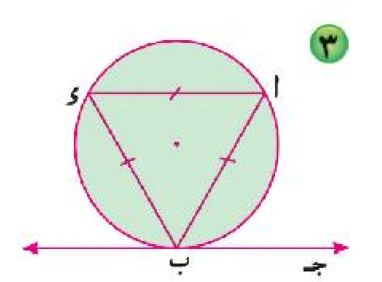
١



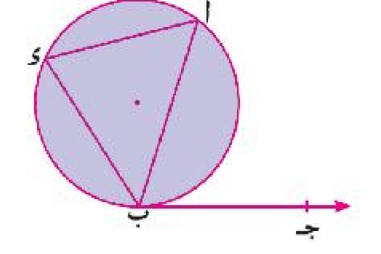
٢



٣



نظرية ٥ قياسُ الزاويةِ المماسيَّة يساوي قياسَ الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.



المعطيات: ∠ أ ب جـ زاوية مماسية ، ∠ ء زاوية محيطية .

المطلوب: إثبات أن : ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ ء)

البرهان: ∵ ∠ أ ب جـ زاوية مماسية

∴ ق (∠ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) ①

∵ ∠ ء زاوية محيطية

∴ ق (∠ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) ②

من ① ، ② ينتج أن :

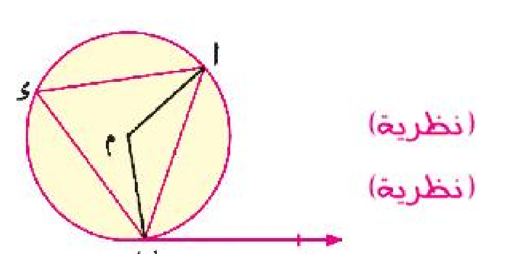
ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ ء)





قياس الزاوية المماسيَّة يساوي نصفَ قياس الزاوية المركزيَّة المشتركة معها في القوس.

في الشكلِ المقابلِ :



$\overleftarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة م ، $\overline{أ ب}$ وتر التماس

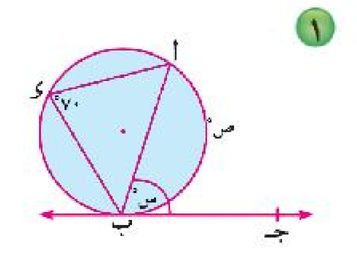
∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ ء) (نظرية)

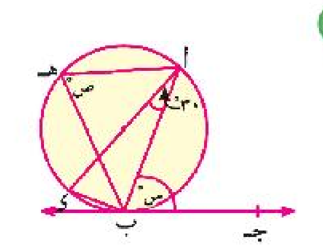
∵ ق (∠ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ أ م ب) (نظرية)

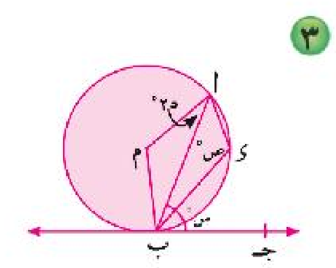
∴ ق (∠ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ أ م ب)



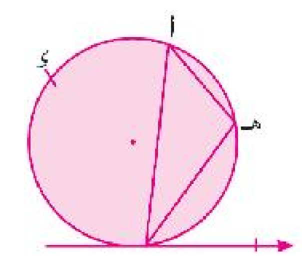
في كل من الأشكال الآتية: $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس .







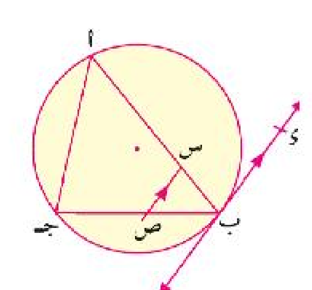
ملاحظة هامة :



الزاويةُ المماسيةُ تكمل الزاويةَ المحيطيةَ المرسومةَ على وترِ الزاوية المماسية وفي جهة واحدة منه .

أي أن : $\measuredangle$ ا ب جـ تكمل $\measuredangle$ ا هـ ب .





ا ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{ب ى}$ مماس للدائرة عند ب ،

س $\in \overline{ا ب}$ ، ص $\in \overline{ب جـ}$ حيث $\overline{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ب ى}$.

أثبت أن : الشكل ا س ص جـ رباعي دائري .

البرهان: $\because$ $\overleftrightarrow{ب ى}$ مماس للدائرة عند ب، $\overline{ا ب}$ وتر التماس . $\therefore$ ق ($\measuredangle$ ى ب ا) = ق ($\measuredangle$ جـ)

$\because$ $\overline{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ى ب}$ ، $\overleftrightarrow{ا ب}$ قاطع لهما $\therefore$ ق ($\measuredangle$ ى ب ا) = ق ($\measuredangle$ ب س ص)

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ ب س ص) = ق ($\measuredangle$ جـ)

$\because$ $\measuredangle$ ب س ص خارجة عن الشكل الرباعي س ص جـ ا .

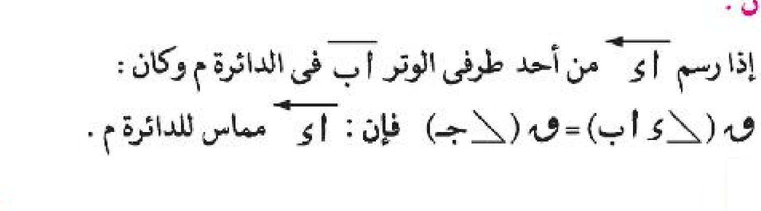
$\therefore$ الشكل س ص جـ ا رباعي دائري (وهو المطلوب)



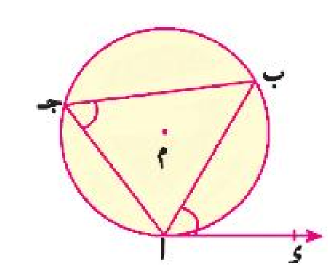
عكس نظرية ٥

إذا رُسم شعاعٌ من أحد طرفي وتر في دائرة بحيث كان قياسُ الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماسًا للدائرة.

أي أن :


إذا رسم أ ى من أحد طرفي الوتر أ ب في الدائرة م وكان :

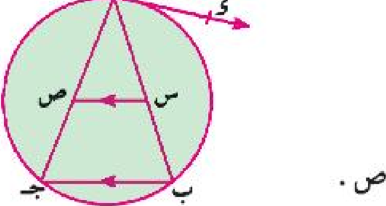
ق (∠ ى أ ب) = ق (∠ جـ)   فإن : أ ى مماس للدائرة م .



مثال (٢)

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، أ ى مماس للدائرة عند أ، س ∈ أ ب ، ص ∈ أ جـ
حيث س ص // ب جـ **أثبت أن :** أ ى مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص .





المعطيات: أ ى مماس للدائرة ، س ص // ب جـ

المطلوب: إثبات أن : أ ى مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص .

البرهان: ∵ أ ى مماس، أ ب وتر التماس   ∴ ق (∠ ى أ ب) = ق (∠ جـ)   (١)

∵ س ص // ب جـ ، أ جـ قاطع لهما   ∴ ق (∠ أ ص س) = ق (∠ جـ)   (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن : ق (∠ ى أ ب) = ق (∠ أ ص س)

أي أن : ق (∠ ى أ س) = ق (∠ أ ص س)

∴ أ ى مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص .

المواصفات الفنيــة



مقـاس الكتـــاب	(١٩,٥×٢٧) سم
طبـــع المتـــن	٤ لون-١ لون
طبـــع الغــلاف	٤ لون
ورق المتـــــن	٧٠ جم أبيض
ورق الغـــــلاف	١٨٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف	١٦٤ صفحة
رقـــم الكتـــاب	١٠/٣/٢٢/٢/٤١/٢٤٧

http://elearning.moe.gov.eg

المصنع الدولى لتحويل الورق

(أولاد كمال فتح الله خضر)